

この x 成分は,

$$(x \text{ 成分}) = g_{xy} - f_{yy} - f_{zz} + h_{xz} \quad \text{となる。}$$

$$\cdot (\text{右辺}) = \mathbf{grad}(\nabla \cdot \mathbf{f}) - \Delta \mathbf{f}$$

$$= \mathbf{grad}(f_x + g_y + h_z) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) [f, g, h]$$

この x 成分は,

$$(x \text{ 成分}) = (f_x + g_y + h_z)_x - (f_{xx} + f_{yy} + f_{zz})$$

$$= \cancel{f_{xx}} + \underbrace{g_{yx}} + \underbrace{h_{zx}} - \cancel{f_{xx}} - f_{yy} - f_{zz}$$

$$= g_{xy} - f_{yy} - f_{zz} + h_{xz} \quad \text{となって, (左辺) と等しい。}$$

(ただし, シュワルツの定理 $g_{yx} = g_{xy}$, $h_{zx} = h_{xz}$ が成り立つものとした。)

∴ (4) の公式も成り立つんだね。

(5) $\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{f} = -\Delta(\mathbf{rot} \mathbf{f})$ の証明は, (4) の公式を使えば, すぐに終わる。(4) の公式: $\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{f} = \mathbf{grad} \mathbf{div} \mathbf{f} - \Delta \mathbf{f}$ を利用すると,

$$(\text{左辺}) = \mathbf{rot} \mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{f}) = \mathbf{grad} \mathbf{div} \mathbf{rot} \mathbf{f} - \Delta(\mathbf{rot} \mathbf{f})$$

これを, (4) の公式の \mathbf{f} に代入する!

0 (P160 の (i) の公式より)

$$= -\Delta(\mathbf{rot} \mathbf{f}) = (\text{右辺}) \quad \text{となって, 証明終了だ!}$$

フ~, 疲れたって? 確かに, 大変な証明だったからね。

● マクスウェルの方程式は, \mathbf{div} と \mathbf{rot} で表される!

以上で, ベクトル解析で重要な \mathbf{grad} , \mathbf{div} , \mathbf{rot} の解説が終わった。そして, 実はマクスウェルの創始した電磁気学は, これらベクトル解析の表記法を用いて, 簡潔な 4 つの方程式にまとめることができる。“マクスウェルの方程式”と呼ばれるもので, 電磁気学のメインテーマは, これらの方程式を導くこと, およびこれらの方程式を用いて様々な問題を解くことなんだね。

ここでは, 厳密な解説ではなく, このマクスウェルの方程式の紹介と, これから予想される電磁波の発生メカニズムの概略について, まとめて簡

単に解説しようと思う。

では、“マクスウェルの方程式”を下に示そう。

マクスウェルの方程式

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \cdots \cdots \cdots (*1) & \text{(II)} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \cdots \cdots \cdots (*2) \\ \text{(III)} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdots \cdots (*3) & \text{(IV)} \operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdots \cdots (*4) \end{array}$$

\mathbf{D} : 電束密度 (C/m^2), ρ : 電荷密度 (C/m^3), \mathbf{B} : 磁束密度 (Wb/m^2)

電荷の単位“クーロン”

磁束(または磁荷)の単位“ウェーバー”

\mathbf{H} : 磁場 (A/m), \mathbf{i} : 電流密度 (A/m^2), \mathbf{E} : 電場 (N/C)

電磁気学の主要テーマが、この4つの方程式に凝縮されているんだね。それでは、1つずつ具体的に見ていこう。

(I) $\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \cdots (*1)$ は、“クーロンの法則” $f = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$ を基

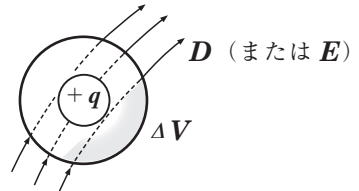
2つの電荷 q_1 と q_2 とが互いに及ぼし合う力を表す公式だね。
ここで、 $k \frac{q_1}{r^2} = E$ (電場) とおくと、 $f = q_2 E$ の形で表すこともできる。

に導かれる公式で、電束密度 \mathbf{D} は、 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ で表される。

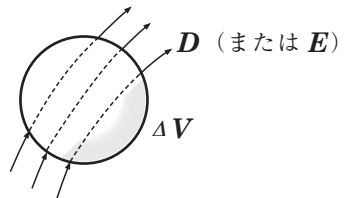
真空の誘電率 電場(ベクトル)

(*1)の公式より、電束密度 \mathbf{D} の発散が ρ となっているので、図4(i)に示すように $\rho \neq 0$ の場合、微小体積 ΔV の中に何らかの電荷 $+q(\text{C})$ が存在していることになる。何故なら、 $\rho = \frac{q}{\Delta V}$ ($\neq 0$) だからだね。そして、これが \mathbf{D} の“湧き出し”(負の電荷の場合は“吸

図4 (i) $\rho \neq 0$ のとき



(ii) $\rho = 0$ のとき



い込み”の原因になっているんだね。

また、図 4(ii) に示すように、 $\rho = 0$ のときは (*1) は $\text{div } \mathbf{D} = 0$ となるので、この場合は、湧き出しのない場（ソレノイド）を表すことになる。

(II) $\text{div } \mathbf{B} = 0 \cdots$ (*2) について、磁束密度 \mathbf{B} は、 $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ と表される。

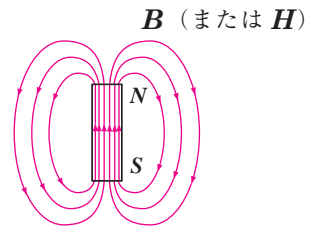
真空の透磁率 磁場

ちなみに、真空の誘電率 ϵ_0 と真空の透磁率 μ_0 の間には

$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$ (c : 光速 ($= 2.998 \times 10^8 \text{ m/s}$) の関係があることも覚えておくといいと思う。

ここで、(*2) から、磁束密度 \mathbf{B} の発散が常に 0 であると言っているので、 \mathbf{B} (または、磁場 \mathbf{H}) は湧き出しのない場（ソレノイド）であることが分かるんだね。これは、電荷は $+q(\text{C})$ や $-q(\text{C})$ など、 \oplus のみのまたは \ominus のみの単電荷が存在し、それらが、(*1) で示したように“湧き出し”や“吸い込み”の基になっていたわけだ。しかし、 N 極と S 極からなる磁石は、それを切断して、どんなに小さくしても、 N 極だけ、または S 極だけの単磁荷をもつようにすることはできない。したがって、図 5 に示すように、磁石の内部まで考えれば、磁束密度 \mathbf{B} (または、磁場 \mathbf{H}) は、湧き出しも吸い込みもなく、ループを描くことが、理解できると思う。では次、

図 5 単磁荷は存在しない
 $\text{div } \mathbf{B} = 0$



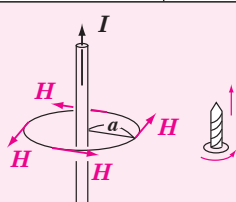
(III) $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdots$ (*3) についても考えてみよう。実は、これは

定常電流 変位電流

右辺の 2 つの項 \mathbf{i} (定常電流) と $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ (変位電流) それぞれに分解して考察するのが分かりやすい。1 つずつ見ていこう。

(i) $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{i} \dots (*)$ は, “アンペールの法則” $\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi a}$ を

無限に伸びた直線上の導線に定常電流 $I(\text{A})$ が流れているとき, 導線から $a(\text{m})$ 離れた場所の磁場が, $\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi a}$ となる。



基に導かれる公式で, 電流密度 \mathbf{i} は, 電流の方向ベクトルを加味した単位面積当りの電流を表している。また, 磁場 \mathbf{H} も当然ベクトルで表している。ここで, $(*)$ より, 定常電流 \mathbf{i} のまわりに磁場 \mathbf{H} がループを描いて存在していることが分かるんだね。つまり, アンペールの法則, そのものってことなんだね。次,

(ii) $\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \dots (*)'$ についても考えてみよう。図 6 に示すように

コンデンサーを含む閉回路に

直流電流を流すものとする。

初め, コンデンサーに電荷は

なかったものとする, コン

デンサーが十分帯電するまで

電流は流れ続ける。その結果,

アンペールの法則より, 導

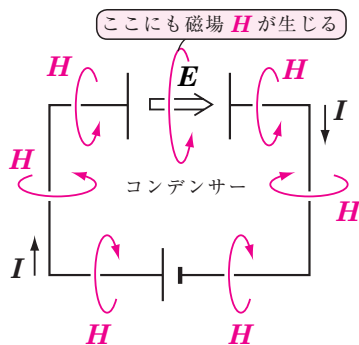
線のまわりに回転する磁場 \mathbf{H} が発生するが, このコンデンサーの 2 枚の

極板間にも磁場が生じるんだね。これは極板間に実際に電流が流れている

わけではないけれど, 2 枚の極板に正・負の電荷が蓄えられていく過程で,

極板間の電場 \mathbf{E} の経時変化 $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ に比例して, 回転する磁場 \mathbf{H} が生じる

図 6 変位電流による磁場 \mathbf{H}



ことになる。つまり、 ϵ_0 を比例定数として、

$$\text{rot } \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial(\epsilon_0 \mathbf{E})}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \dots (*)'$$

そして、これが、変位電流による磁場の公式になる。

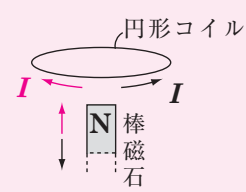
よって、 $(*)$ と $(*)'$ を併せて、

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \dots (*3) \quad \text{が成り立つんだね。では、最後に、}$$

$$(IV) \text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \dots (*4) \quad \text{について解説しよう。この} (*4) \text{は、ファ}$$

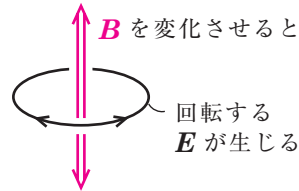
ラデーの“電磁誘導の法則” $V = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ を基に導けるんだね。

円形コイルに対して、右図のように棒磁石を上下させて、円形コイルを貫く磁束 $\Phi(\text{Wb})$ を時間的に変化させると、その変化を妨げる向きに誘導起電力 $V(\text{V})$ が生じるんだね。



そして、公式 $(*4)$ より、図 7 に 図 7 時間変化する \mathbf{B} による電場 \mathbf{E}

示すように、磁束密度 \mathbf{B} を時間的に変化させると、その変化を妨げる向きに回転する電場 \mathbf{E} が生じることが分かるんだね。



以上より、マクスウェルの 4 つの方程式

$$(I) \text{div } \mathbf{D} = \rho \dots\dots\dots (*1) \quad (II) \text{div } \mathbf{B} = 0 \dots\dots\dots (*2)$$

$$(III) \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \dots (*3) \quad (IV) \text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \dots (*4)$$

の意味と、その概略をご理解頂けたと思う。では、これを基に光などを含む電磁波の発生のメカニズムについて、考えてみることにしよう。

ここでは、電荷も定常電流もない空間を考える。したがって、 $\rho = 0$ かつ $\mathbf{i} = \mathbf{0}$ とする。すると、

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho \dots\dots\dots (*1) \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \dots\dots\dots (*2) \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \dots\dots (*3) \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \dots\dots (*4) \end{aligned}$$

・(*1) は $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$ より、
 $\epsilon_0 \mathbf{E}$

$\epsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ となり、よって、 $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \dots (*1)'$ となる。
 (定数) 両辺を $\epsilon_0 (> 0)$ で割った。

・(*2) は、 $\operatorname{div} \mathbf{B} = \mu_0 \operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ より、 $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \dots (*2)'$ となる。
 $\mu_0 \mathbf{H}$ (定数) 両辺を $\mu_0 (> 0)$ で割った。

・(*3) は、 $\mathbf{i} = \mathbf{0}$ より、

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial (\epsilon_0 \mathbf{E})}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \dots (*3)'$$

(定数)

・(*4) は、 $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial (\mu_0 \mathbf{H})}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \dots (*4)'$ となる。
 (定数)

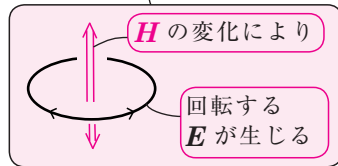
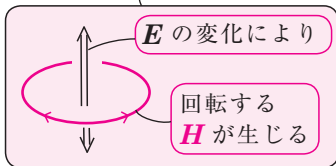
以上より、 $\rho = 0$ 、 $\mathbf{i} = \mathbf{0}$ とおくと、マクスウェルの方程式は、次のように表現できるんだね。

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \dots\dots\dots (*1)'$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \dots\dots\dots (*2)'$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \dots\dots (*3)'$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \dots\dots (*4)'$$



ここで、電荷密度 ρ も定常電流 \mathbf{i} も存在しない真空中において、初めに、図 8(i) に示すように、何らかの変位電流が生じて、時間的に変化する電場 \mathbf{E} が発生したとしよう。すると、(*3)' に従って、回転する磁場 \mathbf{H} が生じることになる。すると、この磁場 \mathbf{H} も時間的に変化するようになるので、(*4)' に従って、次に回転する電

場 E が生じることになる。この電場 E も時間的に変化するので、(* 3)' より、さらに回転する磁場 H が生じることになる。…そして、同様のことが次々に繰り返されることになるので、図 8(ii) に示すように経時変化しながら、電場 E と磁場 H が真空中を次々に伝わっていくことになるんだね。

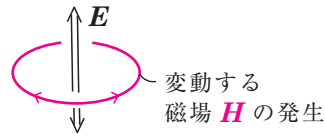
この伝播速度は、光速度に等しく、真空中を伝わっていくことになる。これが、光も含めた電磁波が真空中を伝播していくメカニズムになるんだね。直感的な解説ではあったけれど、これで、マクスウェルの方程式から、電磁波が発生するイメージをつかんで頂けたと思う。

数学的に厳密に電磁波の方程式を導いてみたい方は、「電磁気学キャンパス・ゼミ」(マセマ) でさらに学習されることを勧める。でも、ここで、解説した概略の電磁波のイメージがあれば、電磁気学における緻密な解説にも無理なくついていけると思う。まず、理論の全体像を大ざっぱでもいいから俯瞰ふかんしてみることはとても大事なんだね。これで、電磁気学の大きな流れをつかむことができたんだよ。面白かったらう？

それでは、頭をまたベクトル解析に戻して、次の演習問題と実践問題で、スカラーポテンシャルの問題にチャレンジしてみてくれ。

図 8 電磁波の発生メカニズム

(i) 変動する電場 E の発生



(ii) 電磁波の発生

