演習問題 90 ● 回転体の表面積(Ⅲ)●

曲線 $y = e^x$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ を x 軸のまわりに回転してできる曲面の面積 S を求めよ。

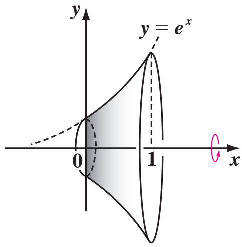
ヒント！ 回転体の表面積の公式：$S = 2\pi\int_a^b y\cdot\sqrt{1+(y')^2}\,dx$ を使って解こう。

解答＆解説

曲線 C：$y = e^x$ …① $(0 \leqq x \leqq 1)$ とおく。

①を x で微分して，

$y' = (e^x)' = e^x$ より，曲線 C を x 軸のまわりに1回転してできる曲面の面積 S は，



$$S = 2\pi\int_0^1 y\cdot\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

$y = e^x$
$y' = e^x$ より

$$= 2\pi\int_0^1 e^x\cdot\sqrt{1+e^{2x}}\,dx$$

ここで，$e^x = t$ とおくと，$x：0 \to 1$ のとき　$t：1 \to e$

また，$e^x dx = dt$　より，$dx = \frac{1}{t}dt$　となる。よって，

$$S = 2\pi\int_1^e \cancel{t}\cdot\sqrt{1+t^2}\cdot\frac{1}{\cancel{t}}\,dt$$

$$= 2\pi\int_1^e \sqrt{t^2+1}\,dt$$

積分公式：
$$\int\sqrt{x^2+\alpha}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+\alpha}+\alpha\log\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right|\right)$$

$$= 2\pi\cdot\frac{1}{2}\left[t\sqrt{t^2+1}+\log\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|\right]_1^e$$

$$= \pi\left\{e\sqrt{e^2+1}+\log\left(e+\sqrt{e^2+1}\right)-\sqrt{2}-\log\left(1+\sqrt{2}\right)\right\}$$

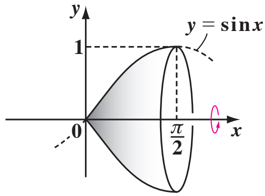
$$= \pi\left(e\sqrt{e^2+1}-\sqrt{2}+\log\frac{e+\sqrt{e^2+1}}{1+\sqrt{2}}\right)$$ ……………………………………(答)

演習問題 91　● 回転体の表面積（Ⅳ）●

曲線 $y=\sin x\left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ を x 軸のまわりに回転してできる曲面の面積 S を求めよ。

ヒント！ これも，公式：$S=2\pi\int_a^b y\cdot\sqrt{1+(y')^2}\,dx$ を使って解いてみよう。

解答＆解説



曲線 C：$y=\sin x$ …① $\left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ とおく。

①を x で微分して，

$y'=(\sin x)'=\boxed{(ア)}$ より，曲線 C を x 軸のまわりに 1 回転してできる曲面の面積 S は，

$$S=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}y\cdot\sqrt{1+(y')^2}\,dx=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot\sqrt{1+\cos^2x}\,dx$$

$\int f(\cos x)\sin x\,dx$ の場合，$\cos x=t$ と置換する。

ここで，$\cos x=t$ とおくと，

$x:0\to\frac{\pi}{2}$ のとき　$t:\boxed{(イ)}\to\boxed{(ウ)}$　また，

$-\sin x\,dx=dt$ より，$dx=-\frac{1}{\sin x}dt$　となる。よって，

$$S=2\pi\int_{\boxed{(イ)}}^{\boxed{(ウ)}}\cancel{\sin x}\cdot\sqrt{1+t^2}\left(-\frac{1}{\cancel{\sin x}}\right)dt$$

$$=2\pi\int_0^1\sqrt{t^2+1}\,dt$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{2}\left[t\sqrt{t^2+1}+\log\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|\right]_0^1$$

積分公式：
$$\int\sqrt{x^2+\alpha}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+\alpha}+\alpha\log\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right|\right)$$

$$=\pi\{\sqrt{2}+\log(\boxed{(エ)})\}$$ ……………………………(答)

解答　(ア) $\cos x$　(イ) 1　(ウ) 0　(エ) $1+\sqrt{2}$