# §2. ラプラス変換入門

これまで,様々な種類の微分方程式の解法について解説してきたけれど,実はまだ教えていない重要テーマが残っている。そのテーマとは“**ラプラス変換**”による常微分方程式の解法なんだ。実は，これは非常に有効で強力な解法手段なんだけれど，奥が深いテーマなので，ここでその全貌を解説することはできないんだね。したがって，ここでは，その入門編として，簡単な例題を使って，ラプラス変換による解法のやり方の概略を紹介しておこう。

## ● ラプラス変換って，何だろう？

これまでの常微分方程式では独立変数 $x$ の関数として $y$ と置いてきたけれど，ここではラプラス変換の表記の慣例に従って，$t$ を独立変数，$y$ を従属変数とおくことにしよう。ここで，$y$ は，定義域が $[0,\ \infty)$ である $t$

$0 \leqq t < \infty$ のこと

の関数として $y(t)$ $(0 \leqq t < \infty)$ と表すものとする。このとき，新たな実数 $s$ で表される次の関数 $Y(s)$ について考えよう。

$$Y(s) = \int_0^\infty y(t)e^{-st}dt \quad \cdots\cdots① \quad (s：実数)$$

①の右辺は，$\displaystyle\lim_{p \to \infty}\int_0^p y(t)e^{-st}dt$ と表せるのはいいね。ここで，被積分関数 $y(t)e^{-st}$ をまず積分区間 $0 \leqq t \leqq p$ で $t$ により定積分するので，$t$ はなくなる。さらに，$p \to \infty$ の極限が存在するとき，これは当然 $s$ の式(関数)となるので,これを①の左辺のように $Y(s)$ とおいたんだね。この①による，$t$ の関数 $y(t)$ から $s$ の関数 $Y(s)$ への変換を“**ラプラス変換**”と呼び，演算子 $\mathcal{L}$ を使って，

$$Y(s) = \mathcal{L}[y(t)] = \int_0^\infty y(t)e^{-st}dt \quad \cdots\cdots(*1) \quad (s：実数)$$

と表す。ここで，$y(t)$ を**原関数**，$Y(s)$ を**像関数**(または，$y(t)$ の**ラプラス変換**)とも呼ぶので，覚えておこう。

それでは，以上のことをまとめて次に示そう。

## ラプラス変換の定義

$[0, \infty)$ で定義される $t$ の関数 $y(t)$ に，次のような $s$ の関数 $Y(s)$ を対応させる演算子を $\mathcal{L}$ とおき，これを"**ラプラス変換**"と定義する。

$$Y(s) = \mathcal{L}[y(t)] = \int_0^{\infty} y(t)e^{-st}dt \quad \cdots\cdots(*1) \quad (s：実数)$$

$(y(t)$：原関数，$Y(s)$：像関数 (または，$y(t)$ のラプラス変換 $))$

それでは，次の例題で，2 種類の $y(t)$ に対するラプラス変換 $Y(s)$ を具体的に計算してみよう。

例題　次のような各原関数 $y(t)$ のラプラス変換 $Y(s)$ を求めてみよう。
(ただし，(1) では，$s > 0$，(2) では $s > a$ とする。)
(1) $y(t) = 1$　　　(2) $y(t) = e^{at}$　　$(a$：実数定数 $)$

(1) $y(t) = 1$ のとき，このラプラス変換 $Y(s)$ を定義式 $(*1)$ を使って求めると，

$$Y(s) = \mathcal{L}[1] = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st}dt \quad \longleftarrow \boxed{Y(s) = \mathcal{L}[y(t)] = \int_0^{\infty} y(t)e^{-st}dt}$$

$$= \lim_{p\to\infty} \underbrace{\int_0^{p} e^{-st}dt}_{\boxed{-\frac{1}{s}[e^{-st}]_0^p = -\frac{1}{s}(e^{-sp} - \underbrace{e^{-0}}_{1}) = \frac{1}{s}(1-e^{-sp})}}$$

$$= \lim_{p\to\infty} \frac{1}{s}(1 - \underbrace{\cancel{e^{-sp}}}_{0})$$

ここで，$s > 0$ より，$s$ を正の定数と考えると

$$\lim_{p\to\infty} e^{-sp} = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{\underbrace{e^{sp}}_{\infty}} = 0$$

$$= \frac{1}{s} \text{ となる。}$$

よって，$\mathcal{L}[1] = \dfrac{1}{s}$，すなわち $y(t) = 1$ のラプラス変換が $Y(s) = \dfrac{1}{s}$ となることが分かったんだね。では，次

(2) $y(t) = e^{at}$ ($a$：実数定数) のとき，このラプラス変換 $Y(s)$ を定義式 (＊1) を使って求めると，

$$Y(s) = \mathcal{L}[e^{at}] = \int_0^\infty \underline{e^{at} \cdot e^{-st}}\, dt$$

$Y(s) = \int_0^\infty y(t)e^{-st}dt \cdots (*1)$

$e^{at-st} = e^{-(s-a)t}$

$$= \lim_{p\to\infty} \underline{\int_0^p e^{-(s-a)t}dt}$$

$-\frac{1}{s-a}\left[e^{-(s-a)t}\right]_0^p = -\frac{1}{s-a}\left(e^{-(s-a)p} - \underline{e^{-0}}\right)$ 　1

$$= \lim_{p\to\infty} \frac{1}{s-a}\left(1 - \cancel{e^{-(s-a)p}}\right)$$

0

ここで，$s > a$ より，$s - a > 0$
よって，
$\lim_{p\to\infty} e^{-(s-a)p} = 0$ となる。

$$= \frac{1}{s-a} \quad \text{となるんだね。}$$

よって，$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$，すなわち $y(t) = e^{at}$ のとき，$Y(s) = \frac{1}{s-a}$ となることも分かったんだね。

(1) と (2) の $y(t)$ と $Y(s)$ の関係を表 1 に示しておこう。

**表 1　$y(t)$ と $Y(s)$ の関係**

| $y(t)$ | $Y(s)$ |
|---|---|
| 1 | $\frac{1}{s}$ $(s>0)$ |
| $e^{at}$ | $\frac{1}{s-a}$ $(s>a)$ |

## ● ラプラス変換には，線形性が成り立つ！

次，2 つの原関数 $f(t)$，$g(t)$ $(t \geqq 0)$ のラプラス変換をそれぞれ $F(s)$，$G(s)$ とおくとき，次の性質が成り立つ。

**ラプラス変換の性質 (Ⅰ)**

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = aF(s) + bG(s) \quad \cdots\cdots (*2) \quad (a,\ b：定数)$$

これは，“**ラプラス変換の線形性**(せんけいせい)”と呼ばれる性質で，(＊2) の証明も簡単に次のようにできるんだね。何故なら，ラプラス変換とは，原関

数に $e^{-st}$ をかけて無限積分するだけの操作だからなんだね。

$$\mathcal{L}[af(t)+bg(t)] = \int_0^{\infty}\{af(t)+bg(t)\}e^{-st}dt$$

$$= a\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt + b\int_0^{\infty} g(t)e^{-st}dt$$ ← 項別積分に持ち込んだ！

$$= a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)]$$

$= aF(s) + bG(s)$ 　となって，$(*2)$ が示せるんだね。

では次，原関数 $y(t)$ の 1 階微分 $y'(t)$ と 2 階微分 $y''(t)$ のラプラス変換の公式も，下に示そう。

## ラプラス変換の性質（Ⅱ）

$[0,\ \infty)$ で定義される $t$ の関数 $y(t)$ のラプラス変換を $Y(s)$ とおく。このとき，$y'(t)$ と $y''(t)$ のラプラス変換は次のようになる。

(1) $\mathcal{L}[y'(t)] = sY(s) - y(0)$ ……………………$(*3)$

(2) $\mathcal{L}[y''(t)] = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$ ……$(*3)'$

(1) の公式の証明 $(*3)$ をやってみよう。

$$\mathcal{L}[y'(t)] = \int_0^{\infty} y'(t)e^{-st}dt = \lim_{p\to\infty}\int_0^{p} y'(t)e^{-st}dt$$

部分積分の公式
$\int f'\cdot g\,dt = f\cdot g - \int f\cdot g'\,dt$

$$= \lim_{p\to\infty}\left\{[y(t)\cdot e^{-st}]_0^p - \int_0^p y(t)\cdot\underbrace{(e^{-st})'}_{-se^{-st}}dt\right\}$$

$$= \lim_{p\to\infty}\{\underbrace{\cancel{y(p)e^{-sp}}}_{0} - \underbrace{y(0)\cdot e^0}_{y(0)}\} + s\cdot\underbrace{\int_0^{\infty} y(t)e^{-st}dt}_{Y(s)}$$

これは，$s>0$ で，かつ $y(p)$ が指数位（しすうい）の関数であることが必要なんだけれど，このことは，今は気にしなくてもいいです。

$= sY(s) - y(0)$ 　となって，$(*3)$ が導ける。

(2) の公式 $(*3)'$ の証明については，$(*3)$ の公式を 2 回使って，

$$\mathcal{L}[\{y'(t)\}'] = s\mathcal{L}[y'(t)] - y'(0) = s\{sY(s) - y(0)\} - y'(0)$$

$$= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$$

と導くことができるんだね。面白かっただろう？

以上の結果をまた，表 2 に示しておくので，$y(t)$ と $Y(s)$ の関係を辞書のようにシッカリ頭に入れておこう。

**表 2　$y(t)$ と $Y(s)$ の関係**

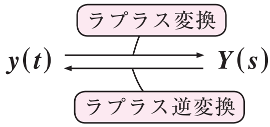
| $y(t)$ | $Y(s)$ |
|---|---|
| $af(t)+bg(t)$ | $aF(s)+bG(s)$ |
| $y'(t)$ | $sY(s)-y(0)$ |
| $y''(t)$ | $s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)$ |

## ● ラプラス逆変換は，ラプラス変換の逆の操作だ！

これまで解説したラプラス変換とは，$y(t)$ から $Y(s)$ への変換 $\mathcal{L}$ のことだったんだね。しかし，これだけでは常微分方程式を解くことはできない。常微分方程式をラプラス変換により解くためには，この逆の変換，すなわち $Y(s)$ から $y(t)$ に変換する，**ラプラス逆変換** $\mathcal{L}^{-1}$ を定義する必要があるんだね。このラプラス変換とその逆変換のイメージを図1に示しておいた。

これは，“エル インバース”と読む。

**図 1 ラプラス変換と逆変換**




ただし，このラプラス逆変換が存在するためには，$y(t)$ と $Y(s)$ の間に 1対1 の対応関係が必要となる。実は，これは厳密には成り立たないんだけれど，原関数 $y(t)$ を連続な関数のみに限定すれば，1対 1 対応が存在して，ラプラス逆変換 $\mathcal{L}^{-1}$ を定義できるようになるんだね。この意味については，今は深く考える必要はないよ。これまで解説した $y(t)$ と $Y(s)$ の間には 1対 1 の対応関係があり，ラプラス逆変換 $\mathcal{L}^{-1}$ が存在するからだ。

### ラプラス逆変換の定義

$s$ の関数 $Y(s)$ に対して，$Y(s)=\mathcal{L}[y(t)]$ をみたす関数 $y(t)$ が存在するとき，この $y(t)$ を $Y(s)$ の “**ラプラス逆変換**” または単に “**逆変換**” と呼び，

$y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$ ……$(*4)$　と表す。

これは，ラプラス変換を英和辞書とすると，ラプラス逆変換は和英辞書に相当するんだね。これまでに解説した **5** つのラプラス変換について，その逆変換を示しておこう。

( i ) $\mathcal{L}[1]=\dfrac{1}{s}$ より，この逆変換は

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]=1 \quad \text{となる。}$$

$$y(t)=1 \ \underset{\text{ラプラス逆変換}}{\overset{\text{ラプラス変換}}{\rightleftarrows}}\ Y(s)=\frac{1}{s}$$

( ii ) $\mathcal{L}[e^{at}]=\dfrac{1}{s-a}$ より，この逆変換は

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right]=e^{at} \quad \text{となる。よって，}$$

$$y(t)=e^{at} \ \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}}\ Y(s)=\frac{1}{s-a}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]=e^{2t}\ ,\quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right]=e^{3t}\ ,\quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]=e^{-t} \quad \text{など}$$

$a=2$ のとき　　$a=3$ のとき　　$a=-1$ のとき

となるんだね。大丈夫？

( iii ) $\mathcal{L}[af(t)+bg(t)]=aF(s)+bG(s)$

より，この逆変換は，

$$\mathcal{L}^{-1}[aF(s)+bG(s)]$$
$$=af(t)+bg(t)$$

$$af(t)+bg(t) \ \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}}\ aF(s)+bG(s)$$

となるんだね。だから，たとえば

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s-1}-\frac{3}{s+1}\right]=2\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]}_{e^{t}}-3\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]}_{e^{-t}}$$

$=2e^{t}-3e^{-t}$ となって，逆変換でも線形性が成り立つ。

( iv ) $\mathcal{L}[y'(t)]=sY(s)-y(0)$

より，この逆変換は，

$$\mathcal{L}^{-1}[sY(s)-y(0)]=y'(t) \quad \text{となる。}$$

$$y'(t) \ \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}}\ sY(s)-y(0)$$

( v ) $\mathcal{L}[y''(t)]=s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)$

より，この逆変換は，

$$\mathcal{L}^{-1}[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)]$$
$$=y''(t) \quad \text{となるんだね。}$$

$$y''(t) \ \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}}\ s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)$$

## ● ラプラス変換により，微分方程式を解いてみよう！

準備も整ったので，これからいよいよラプラス変換とラプラス逆変換を使って，実際に微分方程式を解いていくことにしよう。

例として，**P89** の例題 **20** で既に解説した微分方程式：

$y'' - y' - 2y = e^t$ ……①　（ただし，$y(0) = y'(0) = 0$ とする）

$y$ は，$t$ の関数なので，微分はすべて，$t$ での微分を表す。

この初期条件を新たに加えた！

について考えてみよう。①の微分方程式の一般解は，

$$y(t) = \underbrace{-\frac{1}{2}e^t}_{\text{特殊解}} + \underbrace{C_1e^{2t} + C_2e^{-t}}_{\text{余関数}} \quad \cdots\cdots②$$

となるんだったね。

②を $t$ で微分すると，

$$y'(t) = -\frac{1}{2}e^t + 2C_1e^{2t} - C_2e^{-t} \quad \cdots\cdots②'$$

となる。

ただし，今回は初期条件：$y(0) = 0$，$y'(0) = 0$ が加わるので，

②と②′に $t = 0$ を代入して，$y(0) = 0$ かつ $y'(0) = 0$ をみたす $C_1$ と $C_2$ を求めると，

$$\begin{cases} y(0) = -\dfrac{1}{2} + \ \ C_1 + C_2 = 0 & \cdots\cdots③ \\ y'(0) = -\dfrac{1}{2} + 2C_1 - C_2 = 0 & \cdots\cdots④ \end{cases}$$

より

③＋④より，$-1 + 3C_1 = 0$

$\therefore C_1 = \dfrac{1}{3}$

これを③に代入して，

$C_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$

$C_1 = \dfrac{1}{3}$，$C_2 = \dfrac{1}{6}$ となる。

よって，初期条件も含めた①の特殊解は

$$y(t) = -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{1}{6}e^{-t} \quad \cdots\cdots②''$$

となるんだね。

この②″と同じ結果は，ラプラス変換による解法からもシンプルに導くことができる。早速やってみよう！

### ラプラス変換と逆変換による解法

①の両辺をラプラス変換すると，

$\underbrace{\mathcal{L}[y''(t) - y'(t) - 2y(t)]}_{\text{線形性により，項別にラプラス変換できる！}} = \underbrace{\mathcal{L}[e^t]}_{\frac{1}{s-1}}$ ……………………………(ア)

公式：
$\mathcal{L}[e^{at}] = \dfrac{1}{s-a}$

ここで，$y(t)$ のラプラス変換を $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$ とおいて，(ア) をさらに変形すると，

$$\underbrace{\mathcal{L}[y''(t)]}_{s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)} - \underbrace{\mathcal{L}[y'(t)]}_{sY(s)-y(0)} - 2\underbrace{\mathcal{L}[y(t)]}_{Y(s)} = \frac{1}{s-1}$$

公式：
$\mathcal{L}[y'(t)] = sY(s) - y(0)$
$\mathcal{L}[y''(t)] = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$

$$s^2Y(s) - \underbrace{\cancel{sy(0)}}_{0} - \underbrace{\cancel{y'(0)}}_{0} - \{sY(s) - \underbrace{\cancel{y(0)}}_{0}\} - 2Y(s) = \frac{1}{s-1}$$ となる。

初期条件より

ここで，初期条件：$y(0) = y'(0) = 0$ より

$$s^2Y(s) - sY(s) - 2Y(s) = \frac{1}{s-1} \quad \cdots\cdots(\text{イ})$$ となるんだね。どう？

①の微分方程式をラプラス変換すると，(イ) のように $Y(s)$ の簡単な代数方程式が得られるので，これを変形すれば，$Y(s)$ はスグに求まるね。

(イ) を変形して，

$$\underbrace{(s^2 - s - 2)}_{(s+1)(s-2)}Y(s) = \frac{1}{s-1} \qquad (s+1)(s-2)Y(s) = \frac{1}{s-1}$$

よって，両辺を $(s+1)(s-2)$ で割ると，$y(t)$ のラプラス変換 $Y(s)$ が，

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)(s+1)(s-2)} \quad \cdots\cdots(\text{ウ})$$ と，求まるんだね。

後は，$Y(s)$ の逆変換により $\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = y(t)$ を計算すれば，①の解 $y(t)$ が得られる。そのためにまず，(ウ) を部分分数に分解しておくと，

$$Y(s) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{s+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s-2} \quad \cdots(\text{ウ})'$$ となる。よって，(ウ)′

の両辺の逆変換を行うと，次のように $y(t)$ が求まる。

$$\underbrace{\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]}_{y(t)} = \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{s+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s-2}\right]}_{\text{これは線形性を利用しよう！}}$$ より，

$$y(t) = \frac{1}{6}\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]}_{e^{-t}} - \frac{1}{2}\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]}_{e^{t}} + \frac{1}{3}\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]}_{e^{2t}}$$

公式：$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = e^{at}$

よって，求める解 $y(t)$ は，

$y(t) = -\frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{1}{6}e^{-t}$　となって，② ″の結果と一致する。

ここで，部分分数に分解した係数 $a$，$b$，$c$ の値は次のように求めた。

$$\frac{1}{(s-1)(s+1)(s-2)} = \frac{a}{s+1} + \frac{b}{s-1} + \frac{c}{s-2} \quad \cdots\cdots ⑤$$

・⑤の両辺に $s+1$ をかけて，$s=-1$ を代入すると，$b$ と $c$ の項は $0$ となって，$a$ の値を求めることができる。これを次のように表記することにする。

$$a = \frac{1}{(s-1)(s-2)}\bigg|_{s=-1} = \frac{1}{(-1-1)(-1-2)} = \frac{1}{-2\times(-3)} = \frac{1}{6}$$

・同様に，⑤の両辺に $s-1$ をかけて，$s=1$ を代入して，$b$ を求めると，

$$b = \frac{1}{(s+1)(s-2)}\bigg|_{s=1} = \frac{1}{2\times(-1)} = -\frac{1}{2}$$

・同様に，⑤の両辺に $s-2$ をかけて，$s=2$ を代入して，$c$ を求めると，

$$c = \frac{1}{(s-1)(s+1)}\bigg|_{s=2} = \frac{1}{1\times 3} = \frac{1}{3}$$

では，もう 1 題，次の微分方程式を解いておこう。

$(ex)$ $y'' - 3y' + 2y = 2$　$\cdots\cdots$①　（ただし，$y(0) = y'(0) = 0$ とする）

①の両辺をラプラス変換すると，

$$\mathcal{L}[y'' - 3y' + 2y] = \mathcal{L}[2] \qquad 2\mathcal{L}[1] = 2\cdot\frac{1}{s}$$

$\mathcal{L}[y''] - 3\mathcal{L}[y'] + 2\mathcal{L}[y]$

$= s^2Y(s) - s\underbrace{\cancel{y(0)}}_{\boxed{0}} - \underbrace{\cancel{y'(0)}}_{\boxed{0}} - 3\{sY(s) - \underbrace{\cancel{y(0)}}_{\boxed{0}}\} + 2Y(s)$ ←初期条件

$= s^2Y(s) - 3sY(s) + 2Y(s)$

$$\underbrace{(s^2 - 3s + 2)}_{(s-1)(s-2)}\cdot Y(s) = \frac{2}{s}$$

よって，この両辺を $(s-1)(s-2)$ で割って，

$$Y(s)=\frac{2}{s(s-1)(s-2)}$$

この両辺を部分分数に分解すると，

$$Y(s)=\frac{1}{s}-\frac{2}{s-1}+\frac{1}{s-2}\quad\cdots\cdots②$$

となる。

部分分数に分解した係数 $a$，$b$，$c$ の値を求める。

$\dfrac{2}{s(s-1)(s-2)}=\dfrac{a}{s}+\dfrac{b}{s-1}+\dfrac{c}{s-2}$ について，

$\cdot\ a=\left.\dfrac{2}{(s-1)(s-2)}\right|_{s=0}=\dfrac{2}{-1\times(-2)}=1$

$\cdot\ b=\left.\dfrac{2}{s(s-2)}\right|_{s=1}=\dfrac{2}{1\times(-1)}=-2$

$\cdot\ c=\left.\dfrac{2}{s(s-1)}\right|_{s=2}=\dfrac{2}{2\times 1}=1$

よって，②の両辺の逆変換をとればいいんだね。

$$\underbrace{\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]}_{y(t)}=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}-\frac{2}{s-1}+\frac{1}{s-2}\right]$$

よって，

$$y(t)=\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]}_{1}-2\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]}_{e^t}+\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]}_{e^{2t}}$$

公式：

$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s}\right]=1$

$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s-a}\right]=e^{at}$

以上より，求める①の微分方程式の解 $y(t)$ は，

$y(t)=1-2e^t+e^{2t}$　であることが分かった。納得いった？

本当に基本だけしか教えてはいないんだけれど，これだけでもラプラス変換と逆変換による常微分方程式の解法の流れをご理解頂けたと思う。積分を一切行わず，常微分方程式が解けてしまうところが，このラプラス変換による解法のスゴイところなんだね。面白かったでしょう？

ラプラス変換をより本格的に学んでみたい方には，「**ラプラス変換キャンパス・ゼミ**」(**マセマ**)を，また，ラプラス変換も含めた微分方程式の計算練習をもっとやってみたい方には，「**演習 常微分方程式キャンパス・ゼミ**」をお勧めする。本講義を基にして，さらに着実に学習していって頂きたい。新たな数学的展望がまた広がると思う。