演習問題 145　　● 3 重積分 (Ⅲ) ●

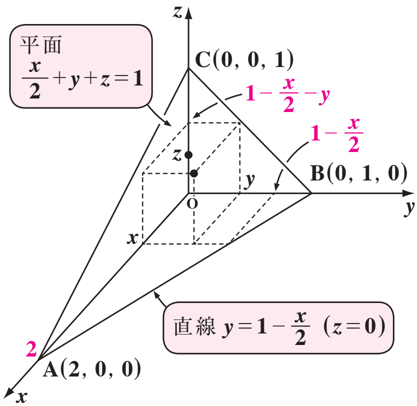
領域 $D=\left\{(x,\ y,\ z)\ \middle|\ \dfrac{x}{2}+y+z\leqq 1,\ \ x\geqq 0,\ \ y\geqq 0,\ \ z\geqq 0\right\}$ における

$f(x,\ y,\ z)=\dfrac{1}{\left(\dfrac{x}{2}+y+z+1\right)^2}$ の3重積分 $\displaystyle\iiint_D f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz$ を求めよ。

ヒント！ 積分区間に気を付けて，この 3 重積分が $\displaystyle\int_0^2\int_0^{1-\frac{x}{2}}\int_0^{1-\frac{x}{2}-y} f\,dz\,dy\,dx$ となることを導いてから，z, y, x の順に累次積分していけばいいんだね。

解答＆解説

領域 D は，右図に示すように，
$O(0,\ 0,\ 0)$，$A(2,\ 0,\ 0)$，$B(0,\ 1,\ 0)$，$C(0,\ 0,\ 1)$ を 4 つの頂点にもつ四面体の表面とその内部である。



よって，領域 D における $f(x,\ y,\ z)$ の 3 重積分を I とおくと，

$$I=\iiint_D f\,dx\,dy\,dz$$

$$=\int_0^2\int_0^{1-\frac{x}{2}}\int_0^{1-\frac{x}{2}-y} \underbrace{f}_{f(x,\ y,\ z)=\left(\frac{x}{2}+y+z+1\right)^{-2}}\,dz\,dy\,dx$$

$$=\int_0^2\left(\int_0^{1-\frac{x}{2}}\left(\underbrace{\int_0^{1-\frac{x}{2}-y}\left(\frac{x}{2}+y+z+1\right)^{-2}dz}\right)dy\right)dx$$

$$-\left[\left(\frac{x}{2}+y+z+1\right)^{-1}\right]_0^{1-\frac{x}{2}-y}$$

z での積分より，$\dfrac{x}{2}+y+1$ は定数扱い。

$$=-\left\{2^{-1}-\left(\frac{x}{2}+y+1\right)^{-1}\right\}$$

$$=\left(\frac{x}{2}+y+1\right)^{-1}-\frac{1}{2}$$

上図より，
(ⅰ) x は区間 $[0,\ 2]$ を動く。
(ⅱ) x が区間 $[0,\ 2]$ におけるある値をとるとき，y は区間 $\left[0,\ 1-\dfrac{x}{2}\right]$ を動く。
(ⅲ) x が区間 $[0,\ 2]$，y が区間 $\left[0,\ 1-\dfrac{x}{2}\right]$ におけるある値をとるとき，z は区間 $\left[0,\ 1-\dfrac{x}{2}-y\right]$ を動く。

よって,

$$I=\int_0^2\left(\underbrace{\int_0^{1-\frac{x}{2}}\left\{\left(\frac{x}{2}+y+1\right)^{-1}-\frac{1}{2}\right\}dy}\right)dx$$

$$\left[\log\left(\frac{x}{2}+y+1\right)-\frac{1}{2}y\right]_0^{1-\frac{x}{2}}$$

y での積分より，$\dfrac{x}{2}+1$ は定数扱いになる。

$$=\log 2-\frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)-\underbrace{\log\left(\frac{x}{2}+1\right)}_{\log\frac{x+2}{2}=\log(x+2)-\log 2}+\cancel{\frac{1}{2}\cdot 0}$$

$$=\log 2-\frac{1}{2}+\frac{x}{4}-\log(x+2)+\log 2$$

$$=\int_0^2\left\{\left(2\log 2-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}x-\log(x+2)\right\}dx$$

$$=\underbrace{\left[\left(2\log 2-\frac{1}{2}\right)x+\frac{1}{8}x^2\right]_0^2}-\underbrace{\int_0^2\log(x+2)\,dx}$$

$$\left(2\log 2-\frac{1}{2}\right)2+\frac{1}{2}$$

$$=4\log 2-1+\frac{1}{2}$$

$$=4\log 2-\frac{1}{2}$$

$x+2=t$ とおくと，$t:2\to 4$

また，$dx=dt$ より，

$$\int_2^4\log t\,dt=[t\log t-t]_2^4$$

$$=\underbrace{4\log 4}_{\log 2^2=2\log 2}-4-2\log 2+2$$

$$=6\log 2-2$$

$$=4\log 2-\frac{1}{2}-(6\log 2-2)$$

ゆえに，この 3 重積分 I の値は，

$I=\dfrac{3}{2}-2\log 2$ である。……………………………………………………(答)