以上を対比して，まとめて示そう。

| ● 静磁場 | ● 静電場 |
|---|---|
| $\mathbf{div}\ \boldsymbol{H}=\mathbf{0}$ より，$\boldsymbol{H}=\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A}$ をみたす $\boldsymbol{A}$ が存在する。($\boldsymbol{A}$：ベクトル・ポテンシャル) $\boldsymbol{A}$ には $\nabla f$ をたしても成り立つ任意性がある。 | $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{E}=\mathbf{0}$ より，$\boldsymbol{E}=-\mathbf{grad}\ \phi$ をみたす $\phi$ が存在する。($\phi$：スカラー・ポテンシャル(電位)) $\phi$ には定数 $C$ をたしても成り立つ任意性がある。 |

ここで，マクスウェルの方程式(Ⅰ) $\mathbf{div}\ \underbrace{\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})}_{\varepsilon_0 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})}=\rho(\boldsymbol{r})$，すなわち

$\mathbf{div}\ \underbrace{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})}_{-\mathbf{grad}\ \phi}=\dfrac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0}$ に $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=-\mathbf{grad}\ \phi(\boldsymbol{r})$ を代入すると，

$-\mathbf{div}\ (\mathbf{grad}\ \phi(\boldsymbol{r}))=\dfrac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0}$，　$\underbrace{\mathbf{div}\ (\mathbf{grad}\ \phi(\boldsymbol{r}))}_{\nabla\cdot(\nabla\phi)=\nabla^2\phi=\phi_{xx}+\phi_{yy}+\phi_{zz}}=-\dfrac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0}$　よって，

ポアソンの方程式：$\dfrac{\partial^2\phi(\boldsymbol{r})}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\phi(\boldsymbol{r})}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\phi(\boldsymbol{r})}{\partial z^2}=-\dfrac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0}$ ……①　が成り立つ。

ここで，電荷の周りの電荷のない空間上の点 $\boldsymbol{r}$ においては，当然 $\rho(\boldsymbol{r})=0$ より，

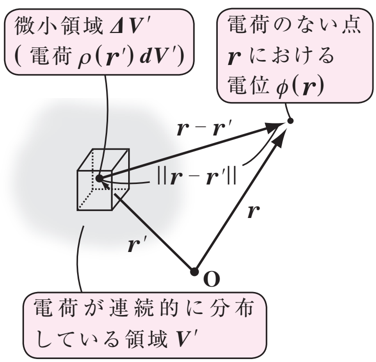
ラプラスの方程式：$\dfrac{\partial^2\phi(\boldsymbol{r})}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\phi(\boldsymbol{r})}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\phi(\boldsymbol{r})}{\partial z^2}=0$ ……②　が成り立つ。

ここで，図3に示すように，領域 $V'$ に電荷が連続的に分布しているとき，$V'$ を微小な領域 $dV'$ に分割することによって，$V'$ の周りの電荷のない点 $\boldsymbol{r}$ における電位 $\phi(\boldsymbol{r})$ は積分形で，

$$\phi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V'}\overbrace{\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}dV'}^{V'\text{中の微小領域 }dV'\text{ における電荷}}\ \cdots ③$$

電位の重ね合せの原理 (P71) より

図3　電位 $\phi(\boldsymbol{r})$ の積分形




と表せる。ただし，$\rho(\boldsymbol{r}')$ は，$V'$ 中の点 $\boldsymbol{r}'$ における電荷密度とする。こ

の③は，領域 $V'$ の周りの電荷のない空間における電位なので，当然②のラプラスの方程式をみたすはずだ。確認しておこう。電荷の存在する領域 $V'$ の内部の点を $\boldsymbol{r}'=[x',\ y',\ z']$ とし，$V'$ の周りの電荷のない空間上の点を $\boldsymbol{r}=[x,\ y,\ z]$ とおくと，$\phi(\boldsymbol{r})$ を $x$ で 2 階偏微分して，

$$\frac{\partial^2\phi(\boldsymbol{r})}{\partial x^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\iiint_{V'}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{\underbrace{\boxed{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}}_{\boxed{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}}}dV'$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\iiint_{V'}\rho(\boldsymbol{r}')\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}^{-\frac{1}{2}}dV' \quad \cdots\cdots ④$$

ここで，

$$\frac{\partial}{\partial x}\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}^{-\frac{1}{2}}$$

合成関数の偏微分

$$=-\frac{1}{\cancel{2}}\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}^{-\frac{3}{2}}\cdot\underbrace{\cancel{2}(x-x')}_{\boxed{\frac{\partial}{\partial x}(x-x')^2}}$$

$$=-(x-x')\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}^{-\frac{3}{2}}$$

これより，
$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}=-\frac{x-x'}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^3}$$
が成り立つ。

この両辺を再び $x$ で偏微分して，

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$=-\frac{\partial}{\partial x}(x-x')\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}^{-\frac{3}{2}}$$

$(f\cdot g)'=f'g+fg'$ より

$$=-[1\cdot\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}^{-\frac{3}{2}}$$

$$+(x-x')\left(-\frac{3}{\cancel{2}}\right)\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}^{-\frac{5}{2}}\cdot\cancel{2}(x-x')]$$

$$=-\underbrace{\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}^{-\frac{3}{2}}}_{\boxed{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^{-3}}}+3(x-x')^2\underbrace{\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}^{-\frac{5}{2}}}_{\boxed{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^{-5}}}$$

$$=\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^{-5}\cdot\{3(x-x')^2-\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^2\} \quad \cdots\cdots ⑤$$

⑤を④に代入して，

$$\frac{\partial^2\phi(\boldsymbol{r})}{\partial x^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V'}\rho(\boldsymbol{r}')\frac{3(x-x')^2-\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^2}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^5}dV' \quad \cdots\cdots ⑥$$

同様に，

$$\frac{\partial^2\phi(\boldsymbol{r})}{\partial x^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V'}\rho(\boldsymbol{r}')\,\frac{3(x-x')^2-\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^2}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^5}\,dV' \cdots ⑥$$

$$\frac{\partial^2\phi(\boldsymbol{r})}{\partial y^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V'}\rho(\boldsymbol{r}')\,\frac{3(y-y')^2-\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^2}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^5}\,dV' \cdots\cdots ⑦$$

$$\frac{\partial^2\phi(\boldsymbol{r})}{\partial z^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V'}\rho(\boldsymbol{r}')\,\frac{3(z-z')^2-\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^2}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^5}\,dV' \cdots\cdots ⑧$$

⑥＋⑦＋⑧より，

$$\frac{\partial^2\phi(\boldsymbol{r})}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi(\boldsymbol{r})}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi(\boldsymbol{r})}{\partial z^2}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V'}\rho(\boldsymbol{r}')\,\underbrace{\frac{\overbrace{3\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}}^{3\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^2}-3\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^2}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^5}}_{0}\,dV'=0$$

となって，$\phi(\boldsymbol{r})=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V'}\dfrac{\rho(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}dV'$ … ③は，②のラプラス方程式をみたす。すなわち，②の解の **1**つであることが分かったんだね。

では次，ベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$についても，$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\mathrm{rot}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$であり，これをアンペールの法則 (マクスウェルの方程式 )

$\mathrm{rot}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})$に代入すると，

$$\underbrace{\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}))}_{\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}=\mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{A})-\Delta\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})$$

P39の公式：
$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{f})-\Delta\boldsymbol{f}$ … $(*\mathrm{f})''$
を使った。

$$\mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{A})-\Delta\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}) \cdots\cdots ⑨$$

ここで，$\mathrm{div}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=0$となるベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$を採用することにすると，⑨より，

$$\cancel{\mathrm{grad}(\underbrace{\mathrm{div}\boldsymbol{A}}_{0})}-\Delta\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}) \qquad \therefore\ \underbrace{\Delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})}_{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)[A_1,\ A_2,\ A_3]}=-\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}) \cdots\cdots ⑩$$

ここで，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=[A_1(\boldsymbol{r}),\ A_2(\boldsymbol{r}),\ A_3(\boldsymbol{r})]$，$\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})=[i_1(\boldsymbol{r}),\ i_2(\boldsymbol{r}),\ i_3(\boldsymbol{r})]$とおくと，⑩式は次の **3**つの方程式を表すことになる。

$$\frac{\partial^2A_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2A_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2A_1}{\partial z^2}=-i_1 \cdots ⑪ \qquad \frac{\partial^2A_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2A_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2A_2}{\partial z^2}=-i_2 \cdots ⑪'$$

$$\frac{\partial^2A_3}{\partial x^2}+\frac{\partial^2A_3}{\partial y^2}+\frac{\partial^2A_3}{\partial z^2}=-i_3 \cdots ⑪''$$

ヒェ～！大変そうだって！？そんなことないよ。ベクトル・ポテンシャルだから **3** つの成分に分けて偏微分方程式を示したんだけれど，これらはみんな $\phi$ の方程式：$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ … ①とまったく同じ形をしている。よって，電荷が連続的に分布している領域 $V'$ の周りの電荷のない空間上の点 $\boldsymbol{r}$ における電位 $\phi(\boldsymbol{r})$ が，

$\phi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V'}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}dV'$ … ③ であり，これがラプラスの方程式：

$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0$ … ② をみたしたように，定常電流の周りの電流のない空間上の点 $\boldsymbol{r}$ におけるベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の $x$ 成分 $A_1(\boldsymbol{r})$ は

$$A_1(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\iiint_{V'}\frac{i_1(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}dV' \quad \cdots ⑫$$

後に示すように，静磁場 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ の積分形は，

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\iiint_{V'}\frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}dV'$$

となるので，$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\mathrm{rot}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の関係から，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ に，$\frac{1}{4\pi}$ の係数と，$\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')=[i_1,\ i_2,\ i_3]$ を含める必要があるんだね。

と表すことができる。(ただし，$V'$ は電流が流れている領域を表し，$\boldsymbol{r}'$ は $V'$ 上の点の位置ベクトルを，$i_1(\boldsymbol{r}')$ は点 $\boldsymbol{r}'$ における電流密度 $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')$ の $x$ 成分を表す。(図 **4**))

そして，⑫はラプラスの方程式：

$\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2}=0$ をみたすことになる。同様に，

$$A_2(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\iiint_{V'}\frac{i_2(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}dV'$$

$$A_3(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\iiint_{V'}\frac{i_3(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}dV'$$

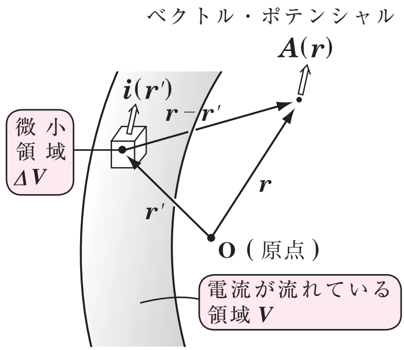
であり，これらもそれぞれのラプラス方程式をみたす。

よって，$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ のベクトル・ポテンシャルは，

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\iiint_{V'}\frac{\boxed{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')}^{[i_1,\ i_2,\ i_3]}}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}dV' \quad \cdots ⑬$$

となる。

図 **4**　ベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$



ここで，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\iiint_{V'} \dfrac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}dV'$ … ⑬ は，$\mathrm{div}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = 0$をみたすものとして導かれた。よって，次に，⑬の $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$に対して，$\underbrace{\mathrm{div}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})}_{\parallel} = 0$，すなわち

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \left[\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right]\cdot[A_1,\ A_2,\ A_3]$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} = 0 \ \cdots\cdots ⑭$$

となることを示そう。$A_1(\boldsymbol{r}) = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\iiint_{V'} \dfrac{i_1(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}dV'$ … ⑫を$x$で偏微分すると，

$$\frac{\partial A_1(\boldsymbol{r})}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{4\pi}\iiint_{V'} \frac{i_1(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}dV'$$

$$= \frac{1}{4\pi}\iiint_{V'} i_1(\boldsymbol{r}')\cdot\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}dV' \ \cdots\cdots ⑮$$

$\boldsymbol{r} = [x,\ y,\ z]$，$\boldsymbol{r}' = [x',\ y',\ z']$とおくと，

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|} = \frac{\partial}{\partial x}\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{1}{\cancel{2}}\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}^{-\frac{3}{2}}\cdot\cancel{2}(x-x')$$

$$= -\frac{x-x'}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^3} \ \cdots\cdots ⑯$$

ここで，$\dfrac{1}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}$を $x'$で偏微分すると，

$$\frac{\partial}{\partial x'}\frac{1}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|} = \frac{\partial}{\partial x'}\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{1}{\cancel{2}}\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}^{-\frac{3}{2}}\cdot\{-\cancel{2}(x-x')\}$$

$$= \frac{x-x'}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^3} \ \cdots\cdots ⑰$$

よって，⑯と⑰を比較すると，

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|} = -\frac{\partial}{\partial x'}\frac{1}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}$$

この両辺に $i_1(\boldsymbol{r}')$をかけて，

$$i_1(\boldsymbol{r}')\cdot\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|} = -i_1(\boldsymbol{r}')\cdot\frac{\partial}{\partial x'}\frac{1}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|} \ \cdots ⑱$$

となる。

ここで，部分積分法より，

$(f \cdot g)' = f'g + fg'$ より

$$\frac{\partial}{\partial x'}\frac{i_1(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|} = \frac{\partial i_1(\boldsymbol{r}')}{\partial x'}\cdot\frac{1}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|} + i_1(\boldsymbol{r}')\cdot\frac{\partial}{\partial x'}\frac{1}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}$$

$$\therefore\ -i_1(\boldsymbol{r}')\cdot\frac{\partial}{\partial x'}\frac{1}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|} = \frac{\partial i_1(\boldsymbol{r}')}{\partial x'}\frac{1}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|} - \frac{\partial}{\partial x'}\frac{i_1(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|} \quad\cdots\cdots ⑲$$

⑲を⑱の右辺に代入して，

$$i_1(\boldsymbol{r}')\cdot\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|} = \frac{\partial i_1(\boldsymbol{r}')}{\partial x'}\frac{1}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|} - \frac{\partial}{\partial x'}\frac{i_1(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|} \quad\cdots ⑳$$ となる。

⑳を⑮に代入して，

$$\frac{\partial A_1(\boldsymbol{r})}{\partial x} = \frac{1}{4\pi}\iiint_{V'}\left\{\frac{\partial i_1(\boldsymbol{r}')}{\partial x'}\cdot\frac{1}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|} - \frac{\partial}{\partial x'}\frac{i_1(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}\right\}dV' \quad\cdots ㉑$$ となる。

$$\begin{cases} A_2(\boldsymbol{r}) = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\iiint_{V'}\frac{i_2(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}\,dV' \\[2ex] A_3(\boldsymbol{r}) = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\iiint_{V'}\frac{i_3(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}\,dV' \end{cases}$$ より，同様に，

$$\frac{\partial A_2(\boldsymbol{r})}{\partial y} = \frac{1}{4\pi}\iiint_{V'}\left\{\frac{\partial i_2(\boldsymbol{r}')}{\partial y'}\cdot\frac{1}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|} - \frac{\partial}{\partial y'}\frac{i_2(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}\right\}dV' \quad\cdots\cdots ㉒$$

$$\frac{\partial A_3(\boldsymbol{r})}{\partial z} = \frac{1}{4\pi}\iiint_{V'}\left\{\frac{\partial i_3(\boldsymbol{r}')}{\partial z'}\cdot\frac{1}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|} - \frac{\partial}{\partial z'}\frac{i_3(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}\right\}dV' \quad\cdots\cdots ㉓$$

よって，㉑＋㉒＋㉓より，

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\partial A_1(\boldsymbol{r})}{\partial x} + \frac{\partial A_2(\boldsymbol{r})}{\partial y} + \frac{\partial A_3(\boldsymbol{r})}{\partial z}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\iiint_{V'}\underbrace{\left\{\frac{\partial i_1(\boldsymbol{r}')}{\partial x'} + \frac{\partial i_2(\boldsymbol{r}')}{\partial y'} + \frac{\partial i_3(\boldsymbol{r}')}{\partial z'}\right\}}_{\left[\frac{\partial}{\partial x'},\ \frac{\partial}{\partial y'},\ \frac{\partial}{\partial z'}\right]\cdot[i_1,\ i_2,\ i_3] = \nabla\cdot\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}') = \mathrm{div}\,\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')}\frac{1}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}\,dV'$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iiint_{V'}\underbrace{\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\frac{i_1(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|} + \frac{\partial}{\partial y'}\frac{i_2(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|} + \frac{\partial}{\partial z'}\frac{i_3(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}\right\}}_{\text{同様に，}\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|} = \mathrm{div}\frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}}dV'$$

電荷の保存則 $-\frac{d\rho}{dt} = \mathbf{0}$ (∵定常電流より $\rho = ($一定$)$)

$$\therefore\ \mathrm{div}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\underbrace{\iiint_{V'}\frac{\boxed{\mathrm{div}\,\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')}}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}dV'}_{\mathbf{0}} - \frac{1}{4\pi}\underbrace{\iiint_{V'}\mathrm{div}\frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}dV'}_{\iint_{S'}\frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}')dS'} \cdots ㉔$$
となる。

ガウスの発散定理より

ここで，領域 $V'$に流れる電流は定常電流より，$V'$内の任意の点 $\boldsymbol{r}'$の電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r}') = ($一定$)$となる。よって，$\rho(\boldsymbol{r}')$の時間微分は $\mathbf{0}$より，$\frac{\partial\rho(\boldsymbol{r}')}{\partial t} = \mathbf{0}$

$$\therefore\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}') = -\frac{\partial\rho(\boldsymbol{r}')}{\partial t} = \mathbf{0}$$

電荷の保存則 (P130)
$\mathrm{div}\,\boldsymbol{i} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$ より

よって，㉔の右辺第 1項は 0である。㉔の右辺第 2項の体積分は，
ガウスの発散定理:

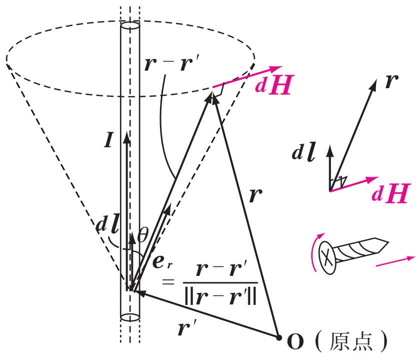
$$\iiint_{V'}\mathrm{div}\frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}dV' = \iint_{S'}\frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}')dS'$$

ガウスの発散定理 (P40)
$\iiint_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{f}\,dV = \iint_S \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$

より，右辺の面積分で計算できる。この左辺の体積分を，電流が分布している領域 $V'$の外側に拡げて行うとき，こうしたとしても，$V'$の外側に電流は分布していないので，元の積分と値は変わらないんだね。このとき，右辺の面積分は，この拡大された領域の表面 $S'$での積分となるが，$S'$上に電流は存在しないので，右辺 $= \mathbf{0}$ となる。
よって，㉔の第 2項も 0である。
以上より，㉔から，$\mathrm{div}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \mathbf{0}$ が導かれるんだね。

ここで，図 5 に示すように，電流 $I$ が流れる導線の長さ $dl$ の微小な部分について，これをベクトル表示した $Id\boldsymbol{l}$ を電流素片と呼んだんだね。(P140)
$(dl = \|d\boldsymbol{l}\|)$
そして，この電流素片 $Id\boldsymbol{l}$により，点 $\boldsymbol{r}$に作られる磁場 $d\boldsymbol{H}$は，ビオ - サバールの法則:

図 5　ビオ - サバールの法則



($I$と $d\boldsymbol{l}$は同じ向きにとる)

$$d\boldsymbol{H} = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{Id\boldsymbol{l}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^3} \cdots ㉕$$

P140の $d\boldsymbol{H} = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{Id\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$ … (＊u)式の $\boldsymbol{r}$，$r$がそれぞれ $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$，$\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|$になっている。

で求められるんだった。

導線の電流 $I$の方向に垂直な面積要素を $dS'$とおくと，$dS'$を通る電流 $I$は，電流密度 $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')$の大きさ $i(\boldsymbol{r}')$を用いて，

$I = i(\boldsymbol{r}')dS'$ となる。

よって，電流素片 $Id\boldsymbol{l}$は，

$$Id\boldsymbol{l} = i(\boldsymbol{r}')dS'\cdot d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')\cdot \boxed{dS'\cdot dl} = \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')\cdot dV'$$

$dV'$(体積要素)

($i(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')dl$ だからね)

$\therefore\ Id\boldsymbol{l} = \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')\cdot dV' \cdots ㉖$ となる。

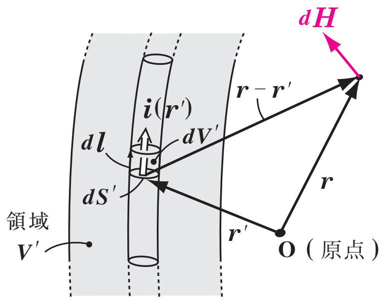
ただし，$dV' = dS'\cdot dl$は，導線に沿って取った体積要素である。

㉖を㉕に代入して，

$$d\boldsymbol{H} = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^3}dV' \cdots ㉗$$ を得る。

ここで，図 6に示すように，定常電流が広がりをもって流れているとき，この電流が流れている領域 $V'$を，図 5に示すような導線が交わることなく多数寄せ集まったものとして考えよう。すると，㉗の磁場 $d\boldsymbol{H}$をこの領域 $V'$全体に渡って積分したものが，$V'$を流れる定常電流が点 $\boldsymbol{r}$に作る磁場 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$になる。

図 6　広がりをもって電流が流れる領域 $V'$




$$\therefore\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\iiint_{V'}\frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^3}dV' \cdots ㉘$$ が導かれる。

これは，電流が広がりをもって流れる場合の，積分形によるビオ-サバールの法則と言えるんだね。

それでは，$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$のベクトル・ポテンシャル

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\iiint_{V'}\frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}dV' \cdots ⑬$$

> これは，$\boldsymbol{H}$のベクトル・ポテンシャルであり，$\boldsymbol{B}$のベクトル・ポテンシャルを$\boldsymbol{A}$とおくと，当然
>
> $$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'}\frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}dV'$$
>
> となる。

から，電流が広がりを持って流れる場合の積分形によるビオ-サバールの法則：

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\iiint_{V'}\frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^3}dV' \cdots\cdots ㉘$$

を，$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\mathbf{rot}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$を用いて導いてみよう。

$\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')=[r_1(\boldsymbol{r}'),\ r_2(\boldsymbol{r}'),\ r_3(\boldsymbol{r}')]$

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=[A_1(\boldsymbol{r}),\ A_2(\boldsymbol{r}),\ A_3(\boldsymbol{r})]$

とおくと，⑬より，

$$\begin{cases} A_1(\boldsymbol{r})=\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\iiint_{V'}\frac{i_1(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}dV' \\ A_2(\boldsymbol{r})=\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\iiint_{V'}\frac{i_2(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}dV' \\ A_3(\boldsymbol{r})=\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\iiint_{V'}\frac{i_3(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}dV' \end{cases}$$

> 外積 $\mathbf{rot}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$の計算：
>
> $$\begin{array}{cccc} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial x} \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_1 \end{array}$$
>
> $$,\ \frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\Big]\Big[\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z},\ \frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial x}$$

よって，$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=[H_1(\boldsymbol{r}),\ H_2(\boldsymbol{r}),\ H_3(\boldsymbol{r})]$

とおくと，$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\mathbf{rot}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$の $x$成分 $H_1(\boldsymbol{r})$は，

$$H_1(\boldsymbol{r})=\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial y}\iiint_{V'}\frac{i_3(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}dV'-\frac{\partial}{\partial z}\iiint_{V'}\frac{i_2(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}dV'\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left(\iiint_{V'}i_3(\boldsymbol{r}')\cdot\underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}}_{=\,-\frac{y-y'}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^3}}dV'-\iiint_{V'}i_2(\boldsymbol{r}')\cdot\underbrace{\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}}_{=\,-\frac{z-z'}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^3}\ (\text{P151より})}dV'\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left\{\iiint_{V'}i_3(\boldsymbol{r}')\cdot\left(-\frac{y-y'}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^3}\right)dV'-\iiint_{V'}i_2(\boldsymbol{r}')\cdot\left(-\frac{z-z'}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^3}\right)dV'\right\}$$

$$\therefore\ H_1(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\iiint_{V'} \frac{\overbrace{i_2(\boldsymbol{r}')(z-z')-i_3(\boldsymbol{r}')(y-y')}^{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\text{の }x\text{成分}}}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^3}\,dV' \quad \cdots ㉙$$

同様に，$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{rot}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$の $y$成分 $H_2(\boldsymbol{r})$，$z$成分 $H_3(\boldsymbol{r})$はそれぞれ，

$$H_2(\boldsymbol{r}) = \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = \frac{1}{4\pi}\iiint_{V'} \frac{\overbrace{i_3(\boldsymbol{r}')(x-x')-i_1(\boldsymbol{r}')(z-z')}^{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\text{の }y\text{成分}}}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^3}\,dV' \quad \cdots ㉚$$

$$H_3(\boldsymbol{r}) = \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = \frac{1}{4\pi}\iiint_{V'} \frac{\overbrace{i_1(\boldsymbol{r}')(y-y')-i_2(\boldsymbol{r}')(x-x')}^{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\text{の }z\text{成分}}}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^3}\,dV' \quad \cdots ㉛$$

また，$\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$の外積の $x$成分，$y$成分，$z$成分はそれぞれ，

$$\begin{cases} i_2(z-z')-i_3(y-y'), \\ i_3(x-x')-i_1(z-z'), \\ i_1(y-y')-i_2(x-x') \end{cases}$$

外積 $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$の計算：

$$\begin{array}{cccc} i_1 & i_2 & i_3 & i_1 \\ x-x' & y-y' & z-z' & x-x' \end{array}$$

$,\ i_1(y-y')-i_2(x-x')][i_2(z-z')-i_3(y-y'),\ i_3(x-x')-i_1(z-z')$

だから，㉙，㉚，㉛の被積分関数の分子は

$\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$の $x$，$y$，$z$成分になっている。

$$\therefore\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = [H_1(\boldsymbol{r}),\ H_2(\boldsymbol{r}),\ H_3(\boldsymbol{r})]$$

$$= \frac{1}{4\pi}\iiint_{V'} \frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^3}\,dV' \quad \cdots ㉘$$ が導かれる。