## 練習問題 33　2 次関数と三角比　CHECK 1　CHECK 2　CHECK 3

$\theta$ の関数 $y=\sin^2\theta+\sqrt{3}\cos\theta+1$ ……①　$(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ について，次の各問いに答えよ。

(1) $\cos\theta=t$ とおいて，①を $t$ の 2 次関数として表せ。

(2) ①の関数の最大値と最小値，およびそのときの $\theta$ の値を求めよ。

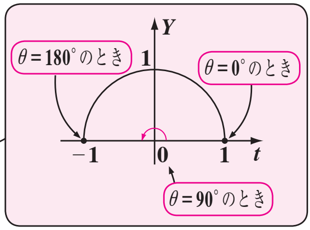
(1) では，$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ として，$\cos\theta=t$ とおくと，$y$ は $t$ の 2 次関数になるんだね。このとき $t$ の取り得る値の範囲も押さえよう。(2) では，$ty$ 座標平面に $t$ の 2 次関数のグラフを描いて $y$ の最大値・最小値とそのときの $t$ の値を求める。そして，この $t$ の値から，三角方程式を解いて角 $\theta$ の値を求めればいいんだね。本格的な問題だけど，頑張ろう！

(1) $y=\underbrace{\sin^2\theta}_{1-\cos^2\theta}+\sqrt{3}\cos\theta+1$ ……①　$(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ を変形して，

公式：$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

$$y=1-\cos^2\theta+\sqrt{3}\cos\theta+1=-\underbrace{\cos^2\theta}_{t^2}+\sqrt{3}\,\underbrace{\cos\theta}_{t}+2$$

ここで $\cos\theta=t$ とおくと，$-1 \leqq t \leqq 1$ より，




①は $t$ の 2 次関数として，

$y=-t^2+\sqrt{3}\,t+2$ ……②　$(-1 \leqq t \leqq 1)$ となる。

(2) ②の $t$ の 2 次関数を $y=f(t)$ とおいて，そのグラフの概形を調べると，

$$y=f(t)=-t^2+\sqrt{3}\,t+2$$

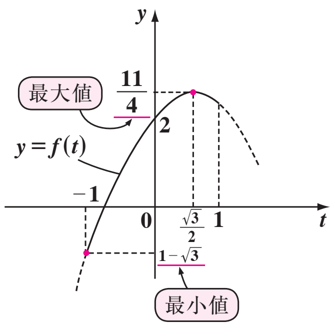
$$=-\left\{t^2-\sqrt{3}\,t+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right\}+2+\frac{3}{4}$$

2 で割って 2 乗　　$\frac{8+3}{4}=\frac{11}{4}$

$$=-\left(t-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{11}{4}\quad(-1 \leqq t \leqq 1)$$

となるので，右図に示すように

$y=f(t)$ は，頂点 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{11}{4}\right)$ の上に凸の放物線の，$-1 \leqq t \leqq 1$ の部分になる。



グラフより明らかに $y=f(t)\ \ (-1 \leqq t \leqq 1)$ は，

・$t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，

　最大値 $f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\cancel{-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\dfrac{11}{4}=\dfrac{11}{4}$ をとり，

・$t=-1$ のとき，

　最小値 $f(-1)=-(-1)^2+\sqrt{3}\cdot(-1)+2=-1-\sqrt{3}+2=1-\sqrt{3}$ をとる。

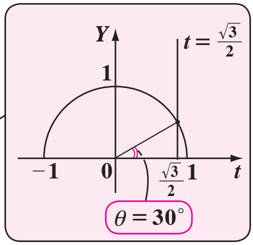
ここで，$t=\cos\theta$ より，

・$t=\boxed{\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$ のとき，

ここで，三角方程式が出てくる。

　$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ \ (0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ より，

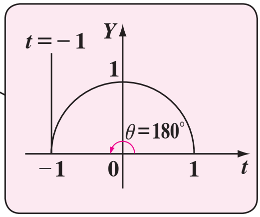
　$\theta=30^\circ$ となる。




・$t=\boxed{\cos\theta=-1}$ のとき，

　$\cos\theta=-1\ \ (0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ より，

　$\theta=180^\circ$ である。




以上より，

$y=\sin^2\theta+\sqrt{3}\cos\theta+1$ ……① は，

・$\theta=30^\circ$ のとき，最大値 $y=\dfrac{11}{4}$ をとり，

・$\theta=180^\circ$ のとき，最小値 $y=1-\sqrt{3}$ をとることが分かったんだね。

応用問題だったんだけれど，大丈夫だった？このように，三角比と 2 次関数の融合問題の中の一部として三角方程式が出てくるところが面白かったでしょう？

今回は特に盛り沢山の内容だったから，この後よ～く復習してシッカリ自分のものにしよう。反復練習することにより，モリモリ実力をアップできるはずだから，頑張って練習しよう！