演習問題 136	● 立体の体積(V) ●

xyz 座標空間に，点 $A(0,0,2)$ を頂点として，xy 平面上の円 $x^2+y^2 \leqq 4$ を底面とする直円すい C がある。C を，平面 $x=1$ で切ってできる 2 つの立体のうち小さい方の立体を T とおく。T の体積 V を求めよ。

ヒント！ 直円すい C を底面と垂直な平面 $x=t$ $(1 \leqq t \leqq 2)$ で切ってできる断面は双曲線と直線とで囲まれた図形になる。この断面積 $S(t)$ を求め，これを t で，$1 \to 2$ の範囲で積分すればいい。かなり計算も大変だけれど，積分の計算力を鍛えるのに最適だから，頑張ってチャレンジしよう！

解答＆解説

図 1 に示すように，頂点 $A(0,0,2)$ の直円すい C の側面上の点を $P(x,y,z)$ とおくと，

$$\begin{cases} \overrightarrow{AP}=(x,\,y,\,z-2) \\ \overrightarrow{AO}=(0,\,0,\,-2) \end{cases}$$ であり，かつ

$\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{AO}$ のなす角は $\frac{\pi}{4}$(一定) なので

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AO}=\|\overrightarrow{AP}\|\|\overrightarrow{AO}\|\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\cancel{x\cdot 0}+\cancel{y\cdot 0}+(z-2)\cdot(-2)=\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}\sqrt{(-2)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

両辺を 2 乗して，2 で割ると，$2(z-2)^2=x^2+y^2+(z-2)^2$

∴直円すい C の側面の方程式は，

$x^2+y^2=(z-2)^2$ ……① となる。

さらに，①より，$\underbrace{z-2}_{0\text{以下}}=\pm\sqrt{x^2+y^2}$

$z \leqq 2$ より

$z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ ……② となる。

この直円すい C を平面 $x=1$ で切ってできる小さい方の立体 T を図 2 に示す。

図 1 直円すい C

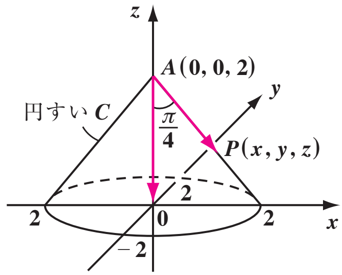


図 2 立体 T

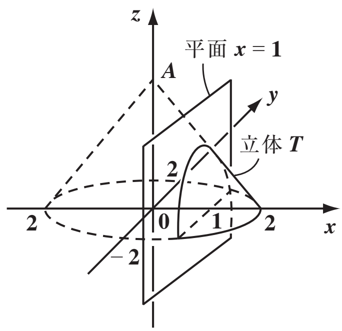


図3(ⅰ)，(ⅱ)に，この立体 T を，平面 $x=t\,(1\leqq t\leqq 2)$ で切ってできる断面を示す。この断面積を $S(t)$ とおくと，求める立体 T の体積 V は，次式で求まる。

$$V=\int_1^2 S(t)dt \quad\cdots\cdots③$$

よって，まず $S(t)$ を求める。

$x=t$ を②に代入して

$$z=2-\sqrt{y^2+t^2} \quad\cdots\cdots④$$

・$z=0$ のとき，④より

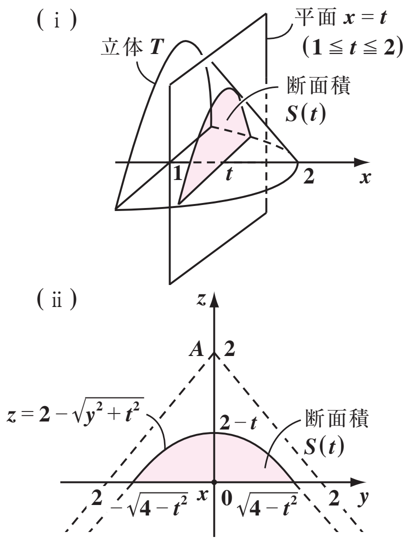
$\sqrt{y^2+t^2}=2$　　$y^2+t^2=4$

$y^2=4-t^2$　　$\therefore\ y=\pm\sqrt{4-t^2}$

・$y=0$ のとき，④より

$z=2-\sqrt{t^2}=2-t$

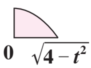
図3　立体 T を平面 $x=t$ で切ってできる切り口の断面積 $S(t)$



$x=t$ を①に代入すると，$t^2+y^2=(z-2)^2$　　$y^2-(z-2)^2=-t^2$（t は定数扱い）
$\dfrac{y^2}{t^2}-\dfrac{(z-2)^2}{t^2}=-1$ となって，これは，yz 平面上で考えると，漸近線 $z=\pm y+2$ をもつ上下の双曲線の下の部分 $(z=2-\sqrt{y^2+t^2})$ のものであることが分かるね。

よって，求める断面積 $S(t)$ は，

$$S(t)=2\int_0^{\sqrt{4-t^2}}(2-\underline{\sqrt{y^2+t^2}})dt$$

[2 × ]

$$=2\left[2y-\underline{\frac{1}{2}\left(y\sqrt{y^2+t^2}+t^2\log\left|y+\sqrt{y^2+t^2}\right|\right)}\right]_0^{\sqrt{4-t^2}}$$

公式：$\int\sqrt{y^2+\alpha}\,dy=\frac{1}{2}\left(y\sqrt{y^2+\alpha}+\alpha\log\left|y+\sqrt{y^2+\alpha}\right|\right)$ を使った。

$$=4\sqrt{4-t^2}-\sqrt{4-t^2}\cdot 2-t^2\log(\sqrt{4-t^2}+2)+t^2\log t$$

$$=2\sqrt{4-t^2}+t^2\log t-t^2\log(\sqrt{4-t^2}+2)$$

$\therefore\ S(t) = 2\sqrt{4-t^2} + t^2\log t - t^2\log(\sqrt{4-t^2}+2)$ ……⑤

$V = \int_1^2 S(t)\,dt$ ……③

よって，⑤を③に代入して，立体 T の体積 V を求めると

$$V = \underbrace{2\int_1^2 \sqrt{4-t^2}\,dt}_{(\text{i})} + \underbrace{\int_1^2 t^2\log t\,dt}_{(\text{ii})} - \underbrace{\int_1^2 t^2\log(\sqrt{4-t^2}+2)\,dt}_{(\text{iii})}$$ ……⑥となる。

⑥の各積分を求めると

(i) $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{4-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\left[t\sqrt{4-t^2} + 4\sin^{-1}\frac{t}{2}\right]_1^2$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\left(4\sin^{-1}1 - \sqrt{3} - 4\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\left(4\cdot\frac{\pi}{2} - \sqrt{3} - 4\cdot\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$

公式：
$\displaystyle\int\sqrt{a^2-t^2}\,dt$
$\displaystyle= \frac{1}{2}\left(t\sqrt{a^2-t^2} + a^2\sin^{-1}\frac{t}{a}\right)$

(ii) $\displaystyle\int_1^2 t^2\log t\,dt = \int_1^2\left(\frac{1}{3}t^3\right)'\log t\,dt$

$\displaystyle= \frac{1}{3}\left[t^3\log t\right]_1^2 - \frac{1}{3}\int_1^2 t^3\cdot\frac{1}{t}\,dt$

$\displaystyle= \frac{1}{3}\cdot 8\log 2 - \frac{1}{9}\left[t^3\right]_1^2 = \frac{8}{3}\log 2 - \frac{7}{9}$

部分積分
$\displaystyle\int f'\cdot g\,dt = f\cdot g - \int f\cdot g'\,dt$

(iii) $\displaystyle\int_1^2 t^2\log(\sqrt{4-t^2}+2)\,dt$ について

$\sqrt{4-t^2} = u$ とおくと，$t:1\to 2$ のとき，$u:\sqrt{3}\to 0$

また，$4-t^2 = u^2$ より，$-2t\,dt = 2u\,du$

よって，$\displaystyle dt = -\frac{u}{t}du = -\frac{u}{\sqrt{4-u^2}}du$ となるので，

与式 $\displaystyle= \int_{\sqrt{3}}^0 (4-u^2)\log(u+2)\cdot\left(-\frac{u}{\sqrt{4-u^2}}\right)du$

$\displaystyle= \int_0^{\sqrt{3}} \underbrace{u\sqrt{4-u^2}}_{\left\{-\frac{1}{3}(4-u^2)^{\frac{3}{2}}\right\}'}\log(u+2)\,du$

$\displaystyle\left\{(4-u^2)^{\frac{3}{2}}\right\}' = \frac{3}{2}(4-u^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(-2u)$
$= -3u(4-u^2)^{\frac{1}{2}}$ より

$$与式 = \int_0^{\sqrt{3}}\left\{-\frac{1}{3}(4-u^2)^{\frac{3}{2}}\right\}' \log(u+2)\,du$$

部分積分

$$= -\frac{1}{3}\left[(4-u^2)^{\frac{3}{2}}\log(u+2)\right]_0^{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\int_0^{\sqrt{3}}\underbrace{(4-u^2)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{u+2}}\,du$$

$$\frac{(2+u)^{\frac{3}{2}}(2-u)^{\frac{3}{2}}}{u+2} = (2+u)^{\frac{1}{2}}(2-u)^{\frac{3}{2}} = \left\{(2+u)(2-u)\right\}^{\frac{1}{2}}\cdot(2-u) = \sqrt{4-u^2}\,(2-u)$$

$$(2^2)^{\frac{3}{2}} = 2^3 = 8$$

$$= -\frac{1}{3}\left\{\log(2+\sqrt{3}) - 4^{\frac{3}{2}}\log 2\right\} + \frac{1}{3}\int_0^{\sqrt{3}}(2-u)\sqrt{4-u^2}\,du$$

$$= -\frac{1}{3}\log(2+\sqrt{3}) + \frac{8}{3}\log 2 + \frac{1}{3}\Big(2\underbrace{\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4-u^2}\,du} - \underbrace{\int_0^{\sqrt{3}}u\sqrt{4-u^2}\,du}\Big)$$

$$\left[\frac{1}{2}\left(u\sqrt{4-u^2}+4\sin^{-1}\frac{u}{2}\right)\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+4\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}+2\cdot\frac{\pi}{3}$$

$$-\frac{1}{3}\left[(4-u^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt{3}} = -\frac{1}{3}(1-4^{\frac{3}{2}}) = -\frac{1}{3}(1-8) = \frac{7}{3}$$

$$= -\frac{1}{3}\log(2+\sqrt{3}) + \frac{8}{3}\log 2 + \frac{1}{3}\left(\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi-\frac{7}{3}\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\log(2+\sqrt{3}) + \frac{8}{3}\log 2 + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{4}{9}\pi - \frac{7}{9}$$

以上 (i)(ii)(iii) の結果を⑥に代入して，求める立体 T の体積 V は，

$$V = 2\underbrace{\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{(\text{i})} + \underbrace{\cancel{\frac{8}{3}\log 2} - \cancel{\frac{7}{9}}}_{(\text{ii})} - \underbrace{\left\{-\frac{1}{3}\log(2+\sqrt{3}) + \cancel{\frac{8}{3}\log 2} + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{4}{9}\pi - \cancel{\frac{7}{9}}\right\}}_{(\text{iii})}$$

$$= \frac{8}{9}\pi - \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}\log(2+\sqrt{3})$$

$$= \frac{1}{9}\left\{8\pi - 12\sqrt{3} + 3\log(2+\sqrt{3})\right\}$$ となる。…………………………………(答)