$$=\lim_{p\to\infty}\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_0^p r\cdot e^{-r^2}\,dr$$ ← r と θ で，それぞれ独立に積分できる。

$$=\lim_{p\to\infty}\left[\theta\right]_0^{2\pi}\cdot\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^p$$

$$=\lim_{p\to\infty}\cancel{2}\pi\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\Big(1-\overset{0}{\boxed{e^{-p^2}}}\Big)=\pi \quad \cdots\cdots\text{②} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{答})$$

(2) $$V=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2-y^2}\,dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,dx\cdot\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}\,dy}_{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,dx}$$

$$=\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,dx\right)^2 \quad \cdots\cdots\text{③}$$

文字変数は x でもかまわない

以上，②，③より，

$$\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{e^{-x^2}}_{\oplus}\,dx\Big)^2=\pi$$

$$\therefore\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi} \quad \cdots\cdots(*)\text{ は成り立つ。} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{終})$$

§3. 曲面の面積

重積分の応用として，xyz 座標空間上に曲面 $z=f(x,\ y)$ が与えられたとき，xy 座標平面上の領域 D に対応するこの曲面の部分の面積の求め方について，解説しよう。ベクトルの"外積(がいせき)"の知識も必要となるけれど，視野が広がって，さらに面白くなると思う。

● まず，ベクトルの外積から解説しよう！

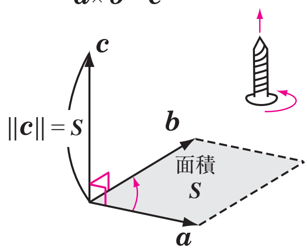
同一直線上にない 2 つの 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の"外積(がいせき)"について，解説しよう。$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積は $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ と表し，これはスカラー量 (1 つの数値) となるのはいいね。これに対して，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積は $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ と表し，これは，ベクトルとなるので，これを $\boldsymbol{c}$ で表すと

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ ← これが外積を表すベクトルだ。

となる。この外積 $\boldsymbol{c}$ の特徴は図 1 に示すように，次の 2 つだ。

図 1　ベクトルの外積

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$



(i) $\boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の両方に直交する。
　つまり，$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$　かつ　$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$ であり，さらに，その向きは，$\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ に向かうように回転するとき，右ねじが進む向きになる。

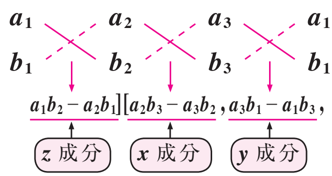
(ii) $\boldsymbol{c}$ のノルム (大きさ) は，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を 2 辺にもつ平行四辺形の面積 S と等しい。つまり，$\|\boldsymbol{c}\|=S$ となる。

では，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積をどのように求めるかについても，解説しよう。3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が，

$\boldsymbol{a}=[a_1,\ a_2,\ a_3]$，$\boldsymbol{b}=[b_1,\ b_2,\ b_3]$ と成分表示されているとき，その外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ の各 x，y，z 成分は図 2 に示すようにテクニカルに求めることができる。

(i) まず，$\boldsymbol{a}=[a_1,\ a_2,\ a_3]$ と $\boldsymbol{b}=[b_1,\ b_2,\ b_3]$ の成分を上下に横に並べて書き，最後に a_1 と b_1 をそれぞれ付け加える。

図2　外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ の求め方



(ⅱ) 真中の $\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ を行列式で計算する要領でたすきがけして $a_2b_3-a_3b_2$ を求め，外積の x 成分とする。

同様に，右の $\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}$ を $a_3b_1-a_1b_3$ と計算して，外積の y 成分とする。

そして，最後に，左の $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ も同様に $a_1b_2-a_2b_1$ と計算して，外積の z 成分とする。

以上 (ⅰ)(ⅱ) から，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積を $\boldsymbol{c}$ とおくと，

$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=[a_2b_3-a_3b_2,\ \ a_3b_1-a_1b_3,\ \ a_1b_2-a_2b_1]$ が求まるんだね。

そして，このノルムが $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を2辺とする平行四辺形の面積 S になるわけだから，この S は，次のように計算することができるんだね。

$S=\|\boldsymbol{c}\|=\sqrt{(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}$

以上をまとめておこう。

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$

2つの3次元ベクトル $\boldsymbol{a}=[a_1,\ a_2,\ a_3]$，$\boldsymbol{b}=[b_1,\ b_2,\ b_3]$ について，

(1) 外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は，次のようになる。

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=[a_2b_3-a_3b_2,\ \ a_3b_1-a_1b_3,\ \ a_1b_2-a_2b_1]$ ……(＊1)

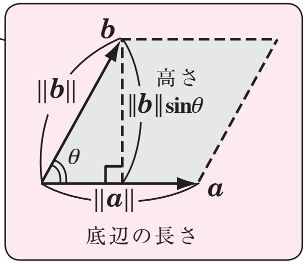
(2) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を2辺とする平行四辺形の面積を S とおくと，これは外積のノルム $\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|$ と等しいので，次式で計算できる。

$S=\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|$

$=\sqrt{(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}$ ……(＊2)

でも，何故外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ のノルムが $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を2辺にもつ平行四辺形の面積 S と等しくなるか，知りたいって!? いいよ，解説しておこう。$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ がなす角を θ とおくと，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を2辺にもつ平行四辺形の面積 S は次の図に示すように，

$$S = \underbrace{\|\boldsymbol{a}\|}_{\text{底辺}}\underbrace{\|\boldsymbol{b}\|\sin\theta}_{\text{高さ}} \quad \cdots\cdots ①$$ となる。



ここで，①の右辺を変形して，

$$S = \sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2\underbrace{\sin^2\theta}_{(1-\cos^2\theta)}}$$

$$= \sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2(1-\cos^2\theta)}$$

$$= \sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 - \underbrace{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2\cos^2\theta}_{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}}$$

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積の定義
$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta$
を使った。

よって，

$$S = \sqrt{\underbrace{\|\boldsymbol{a}\|^2}_{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\underbrace{\|\boldsymbol{b}\|^2}_{b_1^2+b_2^2+b_3^2} - \underbrace{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}_{(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2}} \quad \cdots\cdots ②$$ となる。

ここで，$\boldsymbol{a} = [a_1,\ a_2,\ a_3]$，$\boldsymbol{b} = [b_1,\ b_2,\ b_3]$ より，

$\|\boldsymbol{a}\|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$，$\|\boldsymbol{b}\|^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

を②に代入して，計算は少しメンドウだけれど，これらをまとめれば，平行四辺形の面積 S の公式

$$S = \sqrt{(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2} \cdots (*2)$$ が導けるんだね。

ご自身で確認されるといいよ。

● 曲面の面積公式を導いてみよう！

では，これから，曲面の面積公式を導いてみよう。図 3 に示すように，xyz 座標空間上に $z = f(x,\ y)$ で表される曲面 α があるものとしよう。そして，この曲面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ f(x,\ y))$ における 2 つの偏導関数を，

$f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$，$f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ とおくと，これらは，曲面 α の点 P における接平面上のそれぞれ x 軸方向と y 軸方向の接線の傾きを表すのは大丈夫だね。したがって，この接平面上の x 軸と y 軸それぞれの方向ベクトルを $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ とおくと，

$\boldsymbol{a} = [1,\ 0,\ f_x]$，$\boldsymbol{b} = [0,\ 1,\ f_y]$ となるのもいいね。そして，$\boldsymbol{a}$ に微小な Δx をかけたものを $\Delta\boldsymbol{a}$，また，$\boldsymbol{b}$ に微小な Δy をかけたものを $\Delta\boldsymbol{b}$ と

おくと，

$\Delta \boldsymbol{a} = \Delta x \boldsymbol{a} = \Delta x\,[1,\ 0,\ f_x]$

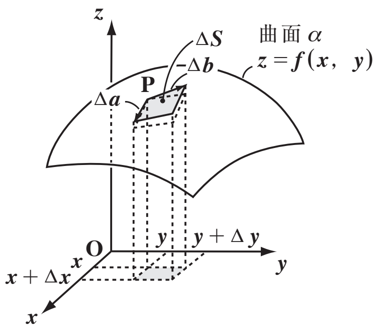
$\quad = [\Delta x,\ 0,\ f_x \Delta x]$ となり，また，

$\Delta \boldsymbol{b} = \Delta y \boldsymbol{b} = \Delta y\,[0,\ 1,\ f_y]$

$\quad = [0,\ \Delta y,\ f_y \Delta y]$ となる。

そして，図3に示すように，この $\Delta \boldsymbol{a}$ と $\Delta \boldsymbol{b}$ を2辺にもつ微小な平行四辺形の面積を ΔS とおくと，これは $\Delta \boldsymbol{a}$ と $\Delta \boldsymbol{b}$ の外積のノルム（大きさ）に等しいので，

図3　曲面 α の微小面積 ΔS



外積 $\Delta \boldsymbol{a} \times \Delta \boldsymbol{b}$ の求め方

$$\begin{array}{cccccccc} \Delta x & & 0 & & f_x \Delta x & & \Delta x \\ 0 & & \Delta y & & f_y \Delta y & & 0 \end{array}$$

$\Delta x \Delta y\,][-f_x \Delta x \Delta y,\ -f_y \Delta x \Delta y,$

$$\Delta S = \|\underbrace{\Delta \boldsymbol{a} \times \Delta \boldsymbol{b}}_{\boxed{[-f_x \Delta x \Delta y,\ -f_y \Delta x \Delta y,\ \Delta x \Delta y]}}\|$$

$$= \sqrt{(-f_x \Delta x \Delta y)^2 + (-f_y \Delta x \Delta y)^2 + (\Delta x \Delta y)^2}$$

$$= \sqrt{(f_x{}^2 + f_y{}^2 + 1)(\Delta x \Delta y)^2}$$

$\therefore\ \Delta S = \sqrt{f_x{}^2 + f_y{}^2 + 1}\,\Delta x \Delta y$ …② となるんだね。

ここで，Δx，Δy をさらに 0 に近づけると，$\Delta x \to dx$，$\Delta y \to dy$，$\Delta S \to dS$ となるので，②は，

$dS = \sqrt{f_x{}^2 + f_y{}^2 + 1}\,dxdy$ …③ となるんだね。

この dS のことを "**面要素**"（または，"**面積要素**"）と呼ぶことも覚えよう。

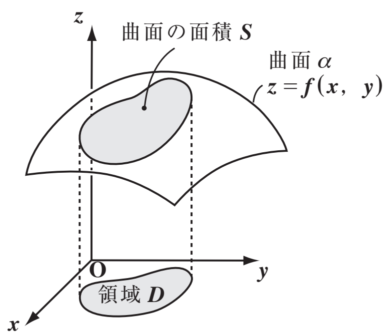
そして，③の面要素 dS を図4に示すように，xy 座標平面上の領域 D で2重積分すれば，領域 D に対応する曲面 α 上の部分の面積 S を求めることができる。

つまり，面積公式：

$$S = \iint_D dS$$

$$= \iint_D \sqrt{f_x{}^2 + f_y{}^2 + 1}\,dxdy \quad \cdots\cdots(*3)$$

図4　曲面の面積 S



が成り立つことが分かったんだね。では，まとめておこう。

曲面の面積 S

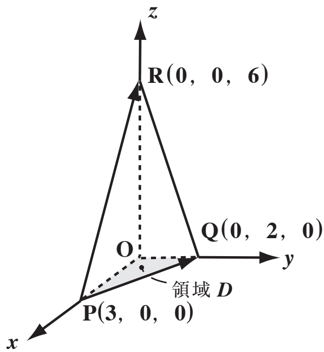
xyz 座標空間上に，曲面 $z=f(x,\ y)$ が与えられているとき，xy 座標平面上の領域 D に対応するこの曲面の部分の面積 S は，次の式で計算できる。

$$S=\iint_D \sqrt{f_x{}^2+f_y{}^2+1}\,dxdy=\iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+1}\,dxdy \quad\cdots(*3)$$

それでは，例題で実際に $(*3)$ の公式を利用してみよう。

xyz 空間上の曲面 $z=f(x,\ y)=6-2x-3y \quad (x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ z\geqq 0)$

の面積 S を求めてみよう。



$z=f(x,\ y)=6-2x-3y$

$(x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ z\geqq 0)$

は右図に示すように，3 点 $P(3,\ 0,\ 0)$，$Q(0,\ 2,\ 0)$，$R(0,\ 0,\ 6)$ を頂点とする $\triangle PQR$ を表すんだね。

これは，三角形の平面を表す。

この面積 S を，公式 $(*3)$ を使って求めてみよう。

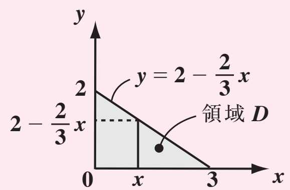
$f_x=\dfrac{\partial f}{\partial x}=-2,\ f_y=\dfrac{\partial f}{\partial y}=-3$ よって，$(*3)$ より，

$$S=\iint_D \sqrt{(-2)^2+(-3)^2+1}\,dxdy$$

$$=\sqrt{14}\iint_D dxdy$$

$$=\sqrt{14}\underbrace{\int_0^3 \underbrace{\left(\int_0^{2-\frac{2}{3}x} 1\,dy\right)}_{(\text{i})} dx}_{(\text{ii})}$$

累次積分



(i) x を固定して，y について区間 $\left[0,\ 2-\dfrac{2}{3}x\right]$ で積分する。

(ii) 次に，x について区間 $[0,\ 3]$ で積分する。

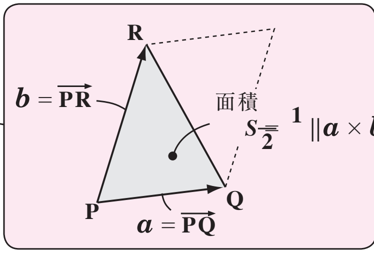
$$\therefore S=\sqrt{14}\int_0^3 \underbrace{[y]_0^{2-\frac{2}{3}x}}_{\left(2-\frac{2}{3}x\right)} dx=\sqrt{14}\int_0^3\left(2-\frac{2}{3}x\right)dx$$

$$=\sqrt{14}\left[2x-\frac{1}{3}x^2\right]_0^3=\sqrt{14}\,(6-3)=3\sqrt{14}$$ となって，答えだ。

もちろん，これは，△PQR の面積 S と等しいわけだから，

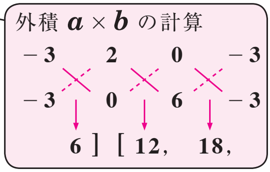
$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ とおくと，右図のように，S は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積の $\frac{1}{2}$ となる。よって，外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ を用いると，

$S=\frac{1}{2}\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|$ と計算できるんだね。



$$\begin{cases}\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=[0,\ 2,\ 0]-[3,\ 0,\ 0]=[-3,\ 2,\ 0]\\ \boldsymbol{b}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=[0,\ 0,\ 6]-[3,\ 0,\ 0]=[-3,\ 0,\ 6]\end{cases}$$ より，

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=[12,\ 18,\ 6]$ となる。



よって，求める△PQR の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\underbrace{12^2+18^2+6^2}_{6^2(4+9+1)}}=\frac{6}{2}\sqrt{14}$$

$\therefore S=3\sqrt{14}$ となって，$(*3)$ の曲面の面積公式で求めた結果と一致することが確認できたんだね。

エッ，平面ではなくて，本当の曲面の面積計算の練習がしたいって？いいよ，次の演習問題と実践問題を解いてみよう。

演習問題 32	● 曲面の面積（Ⅰ）●

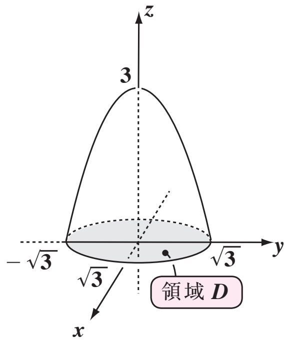
曲面 $z = -(x^2 + y^2) + 3 \quad (z \geqq 0)$ の面積 S を求めよ。

ヒント！ $z = f(x, y) = -(x^2 + y^2) + 3 \ (z \geqq 0)$ は上に凸の放物面を表すので，当然，曲面の面積公式：$S = \iint_D \sqrt{f_x{}^2 + f_y{}^2 + 1}\,dxdy$ を用いて解けばいい。ただし，積分の際に，極座標に変換して解くのがコツだ。

解答&解説

放物面 $z = f(x, y) = -(x^2 + y^2) + 3$ ……① $(z \geqq 0)$ について，
$z = 0$ のとき，$-(x^2 + y^2) = -3$ より，$x^2 + y^2 = 3$ となる。

よって，右図に示すように，①の放物面の内，領域 D：$x^2 + y^2 \leqq 3$ に対応する曲面①の面積を求めればいい。



$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = -2x, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

よって，曲面の面積公式を用いると，

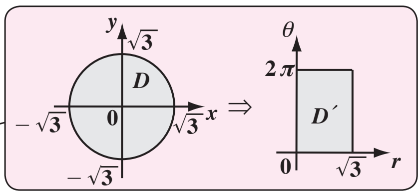
$$S = \iint_D \sqrt{\underbrace{f_x{}^2}_{(-2x)^2} + \underbrace{f_y{}^2}_{(-2y)^2} + 1}\,dxdy$$

$$= \iint_D \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}\,dxdy \quad \cdots\cdots② \quad となる。$$

ここで，$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ により，
極座標 (r, θ) に変数変換すると，

・(x, y) の領域 D：$x^2 + y^2 \leqq 3$ は，

・(r, θ) の領域 D'：$\begin{cases} 0 \leqq r \leqq \sqrt{3} \\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi \end{cases}$



に変換される。また，

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad dxdy = \underbrace{|J|}_{r}\,drd\theta = rdrd\theta \quad となる。$$

ここで，J はヤコビアンで，

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta}\\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_r & x_\theta\\ y_r & y_\theta\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}$$

$$=r\cos^2\theta-(-r)\sin^2\theta=r(\underbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta}_{1})=r$$ となる。

以上より，求める曲面 $z=f(x,\ y)\ (z\geqq 0)$ の面積 S は，②を変形して，

$$S=\iint_D\sqrt{4(\underbrace{x^2+y^2}_{r^2})+1}\,\underbrace{dxdy}_{|J|drd\theta=rdrd\theta}$$

$$=\iint_{D'}\sqrt{4r^2+1}\,rdrd\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\underbrace{\int_0^{\sqrt{3}}r(4r^2+1)^{\frac{1}{2}}\,dr}_{\left[\frac{1}{12}(4r^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt{3}}}$$

合成関数の微分 $\left\{(4r^2+1)^{\frac{3}{2}}\right\}'=\dfrac{3}{2}(4r^2+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 8r=12r(4r^2+1)^{\frac{1}{2}}$ を利用した。

$$=[\theta]_0^{2\pi}\cdot\frac{1}{12}\left[(4r^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{12}\{(4\cdot 3+1)^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}\}$$

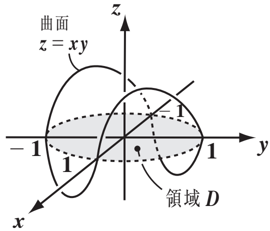
$$=\frac{\pi}{6}(13\sqrt{13}-1)$$ となる。 ……………………………………………………(答)

実践問題 32　● 曲面の面積（Ⅱ）●

曲面 $z = xy \quad (x^2 + y^2 \leqq 1)$ の面積 S を求めよ。

ヒント！ 曲面の形は少し分かりづらいけれど，面積公式を用いて計算すればいいだけだね。最後の問題だ！頑張ろう !!

解答＆解説



曲面 $z = f(x,\ y) = xy$ の

領域 $D : x^2 + y^2 \leqq 1$ における面積 S を求める。

$f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = \boxed{(ア)\quad}$ ， $f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} = \boxed{(イ)\quad}$ より，

求める面積 S は，

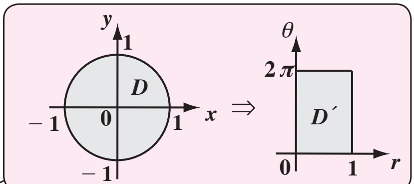
$$S = \iint_D \sqrt{f_x{}^2 + f_y{}^2 + 1}\,dxdy = \iint_D \sqrt{\boxed{(ウ)\qquad}}\,dxdy$$

ここで，$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ により，

極座標 $(r,\ \theta)$ に変数変換すると，

$(x,\ y)$ の領域 $D : x^2 + y^2 \leqq 1$ は，

$(r,\ \theta)$ の領域 $D' : \begin{cases} 0 \leqq r \leqq 1 \\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi \end{cases}$



J は，ヤコビアン

に変換される。また，$x^2 + y^2 = r^2$，$dxdy = |J|drd\theta = rdrd\theta$ より，

$$S = \iint_{D'} \sqrt{\boxed{(エ)\qquad}}\,rdrd\theta = \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{[\theta]_0^{2\pi} = 2\pi} \underbrace{\int_0^1 r(r^2+1)^{\frac{1}{2}}\,dr}_{\left[\frac{1}{3}(r^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1}$$

合成関数の微分 $\left\{(r^2+1)^{\frac{3}{2}}\right\}' = \dfrac{3}{2}(r^2+1)^{\frac{1}{2}} \cdot 2r = 3r(r^2+1)^{\frac{1}{2}}$ を利用した！

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{3}\left[(r^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\pi \cdot \left(2^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) = \boxed{(オ)\qquad\qquad}$$ ………(答)

解答　(ア) y　(イ) x　(ウ) $x^2 + y^2 + 1$　(エ) $r^2 + 1$　(オ) $\dfrac{2}{3}\pi(2\sqrt{2} - 1)$