図 10 で表される $\boldsymbol{a}$ の成分表示は,

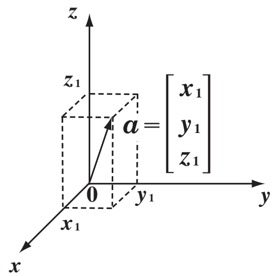
$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$ となり,

その大きさ (ノルム) は,

$\|\boldsymbol{a}\|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$　となる。

さらに, 3 次元ベクトルの内積の成分表示は次の通りである。

図 10　空間ベクトルの成分表示



3 次元ベクトルの内積の成分表示

$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$ のとき,

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ は, $\boldsymbol{a}=[x_1 \quad y_1 \quad z_1]$ $\boldsymbol{b}=[x_2 \quad y_2 \quad z_2]$ のように表しても, 同じことだ。

内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

ここで, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とおくと,

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

(ただし, $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$)

● ベクトルの外積もマスターしよう!

内積の基本の解説が終わったので, 次に, 2 つの 3 次元ベクトルの外積についても解説しておこう。

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積は $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ と表し, これはある実数 (スカラー) になるのに対して, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積は $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ と表し, この結果はベクトルとなる。よって, これを $\boldsymbol{h}$ とおくと, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は,

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{h}$ ……①　と表すことができるんだね。

この外積 $\boldsymbol{h}$ には次に示す 3 つの特徴がある。

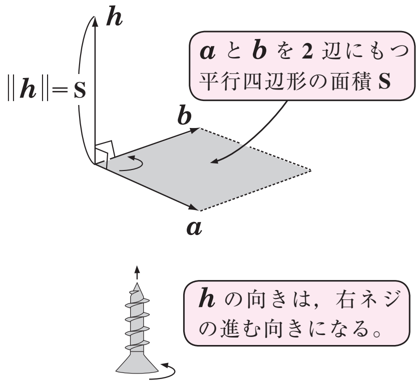
(i) $\boldsymbol{h}$ は, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の両方と直交する。つまり, $\boldsymbol{h}\perp\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{h}\perp\boldsymbol{b}$ より

$\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{a}=0$ かつ $\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{b}=0$ となる。

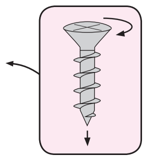
(ii) 外積 $\boldsymbol{h}$ のノルム(大きさ) $\|\boldsymbol{h}\|$ は，図 11 に示すように，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を 2 辺にもつ平行四辺形の面積 S と一致する。つまり
$\|\boldsymbol{h}\| = \mathrm{S}$ となる。

(iii) さらに，$\boldsymbol{h}$ の向きは図 11 に示すように，$\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ に向かうように回転するとき，右ネジが進む向きと一致するんだね。

図 11　ベクトルの外積
$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{h}$



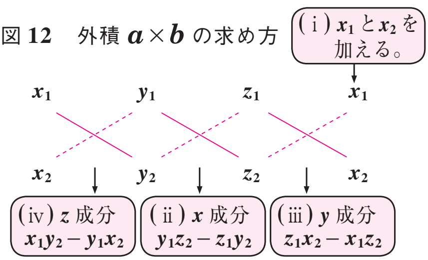
したがって，外積 $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ は，$\boldsymbol{b}$ から $\boldsymbol{a}$ に回転するときに右ネジの進む向きと一致するので，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ と逆向きになる。つまり，



$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \quad (= -\boldsymbol{h})$ となるんだね。このように外積では，交換の法則は成り立たないことに注意しよう。

それでは，外積の具体的な求め方について解説しよう。2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = [x_1 \ \ y_1 \ \ z_1]$，$\boldsymbol{b} = [x_2 \ \ y_2 \ \ z_2]$ の外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は，次の図 12 のように求めることができる。

図 12　外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の求め方



(i) まず，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の成分を上下に並べて書き，最後に，x_1 と x_2 をもう 1 度付け加える。

(ii) 真ん中の $\begin{matrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{matrix}$ をたすきがけに計算した $y_1z_2 - z_1y_2$ を外積の x 成分とする。

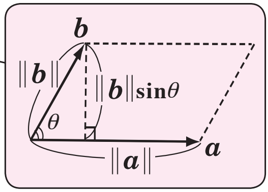
(iii) 右の $\begin{matrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{matrix}$ をたすきがけに計算した $z_1x_2 - x_1z_2$ を外積の y 成分とする。

(iv) 左の $\begin{matrix} x_1 & & y_1 \\ & \times & \\ x_2 & & y_2 \end{matrix}$ をたすきがけに計算した $x_1y_2 - y_1x_2$ を外積の z 成分とする。

以上より，$\boldsymbol{a} = [x_1 \ \ y_1 \ \ z_1]$ と $\boldsymbol{b} = [x_2 \ \ y_2 \ \ z_2]$ の外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ $(= \boldsymbol{h})$ は，

$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = [y_1z_2 - z_1y_2 \ \ z_1x_2 - x_1z_2 \ \ x_1y_2 - y_1x_2]$ ……① となる。

そして，$\boldsymbol{h} \perp \boldsymbol{a}$，かつ $\boldsymbol{h} \perp \boldsymbol{b}$，すなわち $\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{a} = 0$，$\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ となることは容易に計算で分かるので，ご自身で確認されるといい。
ここでは，$\|\boldsymbol{h}\|$ が $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を 2 辺にもつ平行四辺形の面積 S に等しくなることを証明しておこう。



$S = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\sin\theta$ （θ：$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角）より，

$$S^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2\sin^2\theta = \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2(1 - \cos^2\theta)$$

$$= \underbrace{\|\boldsymbol{a}\|^2}_{x_1^2+y_1^2+z_1^2} \cdot \underbrace{\|\boldsymbol{b}\|^2}_{x_2^2+y_2^2+z_2^2} - \underbrace{(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2}_{(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2} \quad \left((\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 = (\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta)^2\right)$$

公式：
$(a+b+c)^2$
$= a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$
を使った。

$$= (x_1^2+y_1^2+z_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2) - (x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2$$

$$= \cancel{x_1^2x_2^2} + x_1^2y_2^2 + x_1^2z_2^2 + y_1^2x_2^2 + \cancel{y_1^2y_2^2} + y_1^2z_2^2 + z_1^2x_2^2 + z_1^2y_2^2 + \cancel{z_1^2z_2^2}$$

$$- (\cancel{x_1^2x_2^2} + \cancel{y_1^2y_2^2} + \cancel{z_1^2z_2^2} + 2x_1x_2y_1y_2 + 2y_1y_2z_1z_2 + 2z_1z_2x_1x_2)$$

$$= (y_1^2z_2^2 - 2y_1y_2z_1z_2 + z_1^2y_2^2) + (z_1^2x_2^2 - 2z_1z_2x_1x_2 + x_1^2z_2^2)$$

$$+ (x_1^2y_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2x_2^2)$$

$$= (y_1z_2 - z_1y_2)^2 + (z_1x_2 - x_1z_2)^2 + (x_1y_2 - y_1x_2)^2$$

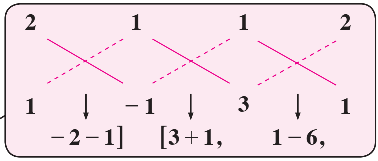
となる。よって，これは $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = [y_1z_2 - z_1y_2 \ \ z_1x_2 - x_1z_2 \ \ x_1y_2 - y_1x_2]$ のノルム（大きさ）の 2 乗に等しい。つまり
$S^2 = \|\boldsymbol{h}\|^2$ より，$\|\boldsymbol{h}\| = S$ （$\because S \geqq 0$，$\|\boldsymbol{h}\| \geqq 0$），すなわち
$\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| = S$ が成り立つことが示せたんだね。納得いった？
では，外積も例題で実際に計算して求めてみよう。

次の各ベクトル $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ の外積 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ を求めよ。

(1) $\boldsymbol{b}=[2\ \ 1\ \ 1]$, $\quad\boldsymbol{c}=[1\ \ -1\ \ 3]$

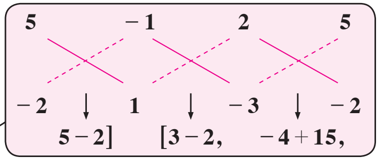
(2) $\boldsymbol{b}=[5\ \ -1\ \ 2]$, $\boldsymbol{c}=[-2\ \ 1\ \ -3]$

(1) $\boldsymbol{b}=[2\ \ 1\ \ 1]$ と $\boldsymbol{c}=[1\ \ -1\ \ 3]$ の外積 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ は右のように計算して，$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=[4\ \ -5\ \ -3]$ となる。



(2) $\boldsymbol{b}=[5\ \ -1\ \ 2]$ と $\boldsymbol{c}=[-2\ \ 1\ \ -3]$ の外積 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ は右のように計算して，

$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=[1\ \ 11\ \ 3]$ となる。



● スカラー3重積も押さえておこう！

ベクトルの内積と外積の応用として，“スカラー3重積”についても解説しよう。

3つの3次元ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ のスカラー3重積は，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ で定義され，これを $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ と表すことにしよう。つまり

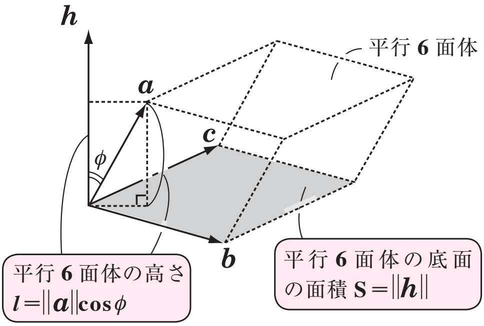
ベクトル3重積 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ ……② だね。

$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ の外積 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ を $\boldsymbol{h}$ とおくと，②は $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{h}$，つまり $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{h}$ の内積なので，この結果はある実数（スカラー）になることが分かるね。

では，このスカラー3重積 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ の図形的な意味を解説しておこう。

図13に示すように，外積 $\boldsymbol{h}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ は，$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ のいずれとも垂直なベクトル，つまり，$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ の張る平面と $\boldsymbol{h}$ は垂直なベクトルであることが，まず分かるね。

図13　ベクトル3重積 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$



また，$\boldsymbol{h}$ のノルム $\|\boldsymbol{h}\|$ は，$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積 S と等しいことも大丈夫だね。

さらに，このスカラー 3 重積 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ は，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{h}(=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ のなす角を ϕ とおくと，

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{h}=\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{h}\|\cos\phi=\underbrace{\|\boldsymbol{h}\|}_{\text{底面の平行四辺形の面積 S}}\underbrace{\|\boldsymbol{a}\|\cos\phi}_{\text{平行六面体の高さ } l}\quad\cdots\cdots③$$ となる。

ここで，図 13 のように，3 次元空間において，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ がいずれも $\boldsymbol{0}$ でなく，かつ同一平面上には存在しないとすると，空間上に，3 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を辺にもつ平行 6 面体（6 つの平行四辺形を面にもつ立体）が考えられる。そして，$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ を辺にもつ平行四辺形を，この平行 6 面体の底面と考えると，この底面の面積 S は $\mathrm{S}=\|\boldsymbol{h}\|$ となる。

また，図 13 に示すように，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{h}$ のなす角 ϕ が，$0\leqq\phi\leqq\dfrac{\pi}{2}$ をみたすとき，$\|\boldsymbol{a}\|\cos\phi$ は，$\boldsymbol{a}$ の終点から底面に下した垂線の長さ，つまり平行 6 面体の高さ l を表すことになるんだね。よって，③は，

$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\mathrm{S}\cdot l\ (=(\text{底面積})\cdot(\text{高さ}))$　となるので，

スカラー 3 重積 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ は，この平行 6 面体の体積 V を表すことになるんだね。もちろん，ϕ は，$\dfrac{\pi}{2}<\phi\leqq\pi$ の場合もあり得る。この場合は，$\cos\phi<0$ となって，高さ $l=\|\boldsymbol{a}\|\cos\phi$ が負の値をとるので，これまで考慮に入れると，この平行 6 面体の体積 V は，このスカラー 3 重積に絶対値を付けて

$\mathrm{V}=|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|$　と表せばよいことが分かるはずだ。

では最後に，$\boldsymbol{a}=[1\ \ -1\ \ 2]$, $\boldsymbol{b}=[2\ \ 1\ \ 1]$, $\boldsymbol{c}=[1\ \ -1\ \ 3]$ のベクトル 3 重積を求めておこう。$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=[4\ \ -5\ \ -3]$ となることは，前の例題 (1) で既に求めているので，

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=[1\ \ -1\ \ 2]\cdot[4\ \ -5\ \ -3]$$
$$=1\cdot4+(-1)\cdot(-5)+2\cdot(-3)=4+5-6=\underline{3}$$ となるんだね。大丈夫？

これは正より，これが $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ でできる平行 6 面体の体積 V なんだね。