この $(*1)$ は，フーリエ級数 $\{u_n(x)\}$ の正規直交条件の式：

$$\int_{-\pi}^{\pi} u_k(x)\,u_n(x)\,dx = \delta_{kn} = \begin{cases} 1 & (k = n \text{ のとき}) \\ 0 & (k \neq n \text{ のとき}) \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots(*2)$$

とは，明らかに異なるんだけれど，$(*1)$ の式も書き変えると，

$$\int_a^b \underbrace{\sqrt{\frac{\rho(x)}{C_k}}\,v_k(x)}_{u_k(x)} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{\rho(x)}{C_n}}\,v_n(x)}_{u_n(x)}\,dx = \delta_{kn} = \begin{cases} 1 & (k = n \text{ のとき}) \\ 0 & (k \neq n \text{ のとき}) \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots(*1)'$$

となる。よって，ここで，新たに $\{u_n(x)\} = \left\{\sqrt{\dfrac{\rho(x)}{C_n}}\,v_n(x)\right\}$ とおけば，$(*2)$ のフーリエ級数と同様の正規直交系の無限関数列が作れるんだね。

それでは，直交多項式 $\{v_n(x)\}$ の具体例について，これからいくつか紹介していこう。

**(ex1)** ルジャンドル多項式 $P_n(x)$

ルジャンドルの微分方程式(*Legendre's differential equation*)：

$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$

の基本解として，ルジャンドル多項式(*Legendre polynomials*) $P_n(x)\,(-1 \leqq x \leqq 1)$ が導かれる。この $P_n(x)$ は，次のロドリグの公式(*Rodrigues formula*)により求められる。

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

$n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$のときの $P_n(x)$ を具体的に示すと，

$P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x,\ P_2(x) = \dfrac{1}{2}(3x^2-1),$

$P_3(x) = \dfrac{1}{2}(5x^3-3x),\ P_4(x) = \dfrac{1}{8}(35x^4-30x^2+3),$ ……となる。

ここで，直交多項式 $\{v_n(x)\} = \{P_n(x)\}$ とおくと，

重み関数 $\rho(x) = 1$，定義域：$-1 \leqq x \leqq 1$，$C_n = \dfrac{2}{2n+1}$ より，$(*1)$ は，

$$\int_{-1}^{1} 1 \cdot P_k(x)\,P_n(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\cdot\delta_{kn} = \begin{cases} \dfrac{2}{2n+1} & (k = n \text{ のとき}) \\ 0 & (k \neq n \text{ のとき}) \end{cases}$$

となるんだね。

よって，新たに $\{u_n(x)\}$ を

$$\{u_n(x)\}=\left\{\sqrt{\frac{\rho(x)}{C_n}}\,v_n(x)\right\}=\left\{\frac{2n+1}{2}\,P_n(x)\right\}\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

とおけば，正規直交系の無限関数列 $\{u_n(x)\}$ が作れるんだね。

このルジャンドル多項式 $P_n(x)$ について詳しく知りたい方は，
「**常微分方程式キャンパス・ゼミ**」(**マセマ**) で学習して下さい。

**(ex2)** ラゲール多項式 $L_n(x)$

ラゲールの微分方程式 (***Laguerre's differential equation***)：

$$xy''+(1-x)y'+ny=0\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

の基本解として，ラゲール多項式 (***Laguerre polynomials***)

$L_n(x)(0\leqq x<\infty)$ が導かれる。この $L_n(x)$ は，次のラゲール多項式のロドリグの公式により求められる。

$$L_n(x)=e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x})\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

$n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ のときの $L_n(x)$ を具体的に示すと，

$L_0(x)=1$，$L_1(x)=1-x$，$L_2(x)=x^2-4x+2$，

$L_3(x)=6-18x+9x^2-x^3$, $L_4(x)=x^4-16x^3+72x^2-96x+24$, …となる。

ここで，直交多項式 $\{v_n(x)\}=\{L_n(x)\}$ とおくと，

重み関数 $\rho(x)=e^{-x}$，定義域：$0\leqq x<\infty$，$C_n=1$ より，

$$\int_a^b\rho(x)v_k(x)v_n(x)dx=C_n\delta_{kn}=\begin{cases}C_n & (k=n\text{ のとき})\\ 0 & (k\neq n\text{ のとき})\end{cases}\quad\cdots\cdots\cdots(*1)\text{ は，}$$

$$\int_0^\infty e^{-x}L_k(x)L_n(x)\,dx=\delta_{kn}=\begin{cases}1 & (k=n\text{ のとき})\\ 0 & (k\neq n\text{ のとき})\end{cases}$$

となる。

よって，新たに $\{u_n(x)\}$ を

$$\{u_n(x)\}=\left\{\sqrt{\frac{\rho(x)}{C_n}}\,v_n(x)\right\}=\{\sqrt{e^{-x}}L_n(x)\}\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

とおけば，正規直交系の無限関数列 $\{u_n(x)\}$ を作ることができるんだね。

(*ex*3) エルミート多項式 $H_n(x)$

エルミートの微分方程式 (***Hermite's differential equation***)：

$y'' - 2xy' + 2ny = 0 \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$

の基本解として，エルミート多項式 (***Hermite polynomials***)

$H_n(x)\ (-\infty < x < \infty)$ が導かれる。この $H_n(x)$ は，次のエルミート多項式のロドリグの公式により求められる。

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right) \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

$n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ のときの $H_n(x)$ を具体的に示すと，

$H_0(x) = 1$，$H_1(x) = 2x$，$H_2(x) = 4x^2 - 2$，

$H_3(x) = 8x^3 - 12x$，$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$，…となる。

ここで，直交多項式 $\{v_n(x)\} = \{H_n(x)\}$ とおくと，

重み関数 $\rho(x) = e^{-x^2}$，定義域：$-\infty < x < \infty$，$C_n = \sqrt{\pi}\,2^n n!$ より，$(*1)$ は，

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_k(x) H_n(x)\,dx = \sqrt{\pi}\,2^n n!\,\delta_{kn} = \begin{cases} \sqrt{\pi}\,2^n n! & (k = n \text{ のとき}) \\ 0 & (k \neq n \text{ のとき}) \end{cases}$$

となるんだね。

よって，新たに $\{u_n(x)\}$ を

$$\{u_n(x)\} = \left\{\sqrt{\frac{\rho(x)}{C_n}}\,v_n(x)\right\} = \left\{\sqrt{\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}\,2^n n!}}\,H_n(x)\right\} \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

とおけば正規直交系の無限関数列 $\{u_n(x)\}$ を作ることができるんだね。大丈夫？

ここで紹介したルジャンドルの微分方程式，ラゲールの微分方程式，エルミートの微分方程式は，様々な理工系の問題を理論解析する際に頻出の微分方程式なんだ。そして，これらの基本解として得られる各多項式は，これまでフーリエ解析で詳しく解説した正規直交関数系の形で表現できるので，様々な境界条件に対して，同様に解析していくことができるんだね。面白かったでしょう？