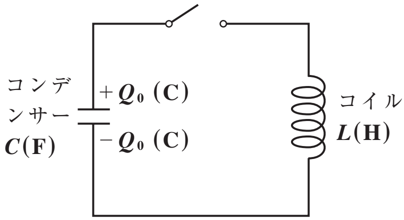
この問題も，ラプラス変換による別解を次に示そう。

別解

ラプラス変換の問題では，慣例として，時間 (t) 領域の変量は小文字で表し，s 領域での変量は大文字で表す。よって，時刻 t におけるコンデンサーの電荷は $q(t)$，回路に流れる電流は $i(t)$ とおき，$q(t)$ のラプラス変換は $\mathcal{L}[q(t)]=Q(s)$ とおくことにする。



また，ラプラス変換の一般的な公式として，以下のものを利用する。

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right]=s^2F(s)-sf(0)-f'(0) \qquad (\text{ただし，}\mathcal{L}[f(t)]=F(s))$$

$$\mathcal{L}[\cos at]=\frac{s}{s^2+a^2} \qquad \left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right]=\cos at\right)$$

ではまず，この LC 回路の (起電力) = (電圧降下) の方程式を立てると，

$$-L\cdot\frac{di(t)}{dt}=\frac{q(t)}{C} \quad \cdots\cdots①$$

となる。

ここで，$i(t)=\dfrac{dq(t)}{dt}$ ……② より，②を①に代入して，

$$-L\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{dq(t)}{dt}\right)=\frac{q(t)}{C} \qquad -L\cdot\frac{d^2q(t)}{dt^2}=\frac{q(t)}{C}$$

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2}=-\overset{\omega^2}{\boxed{\frac{1}{LC}}}\,q(t)$$

ここで，$\dfrac{1}{LC}=\omega^2$ とおくと，

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2}=-\underbrace{\omega^2}_{\text{定数}}q(t) \quad \cdots\cdots③$$

となる。

③の両辺をラプラス変換して，$Q(s)$ $(=\mathcal{L}[q(t)])$ を求めよう。

$$\underbrace{\mathcal{L}\left[\frac{d^2q(t)}{dt^2}\right]}_{s^2Q(s)-sq(0)-\dot{q}(0)} = -\omega^2 \underbrace{\mathcal{L}[q(t)]}_{Q(s)}$$

公式
$\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$ のとき，
$\mathcal{L}[f''(t)]=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$

$\dot{q}(t)$ は $\dfrac{dq(t)}{dt}$ のこと。

$$s^2Q(s)-s\cdot\underbrace{q(0)}_{Q_0}-\underbrace{\dot{q}(0)}_{0}=-\omega^2Q(s)\ \cdots\cdots④$$

ここで，$t=0$ のとき，コンデンサーの正極の電荷は $+Q_0(\mathrm{C})$ より，$q(0)=Q_0$ となる。また，$t=0$ でスイッチを入れた瞬間の電荷の変化はゆっくりしたもののはずだから，$t=0$ における電荷の変化速度 $\dot{q}(0)=0$ とおける。

以上を④に代入して，$Q(s)$ を求めると，

$$s^2Q(s)-sQ_0=-\omega^2Q(s) \qquad (s^2+\omega^2)Q(s)=Q_0\cdot s$$

$$\therefore\ Q(s)=\underbrace{Q_0}_{\text{定数}}\cdot\frac{s}{s^2+\omega^2}\ \cdots\cdots⑤$$ となる。

これで $Q(s)$ が求まったので，⑤の両辺をラプラス逆変換して，$q(t)$ を求めると，

$$\underbrace{\mathcal{L}^{-1}[Q(s)]}_{q(t)}=\underbrace{Q_0}_{\text{定数}}\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+\omega^2}\right]}_{\cos\omega t}$$

公式
$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2+a^2}\right]=\cos at$

$\therefore\ q(t)=Q_0\cos\omega t\ \cdots\cdots⑥$ となって，$q(t)$ が求められた。

次に，$\dot{q}(t)=\dfrac{dq(t)}{dt}=i(t)$ より，⑥の両辺を時刻 t で微分する。

$\therefore\ i(t)=Q_0\dfrac{d}{dt}(\cos\omega t)=-Q_0\omega\sin\omega t$ となって，電流 $i(t)$ も求められる。

これら $q(t)$ と $i(t)$ の結果は，P183 の結果と一致する。