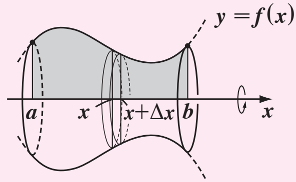
● 回転体の表面積も求めよう！

では次，曲線を x 軸や y 軸のまわりに回転してできる回転体の曲面の表面積を求める公式についても解説しておこう。

回転体の表面積の公式

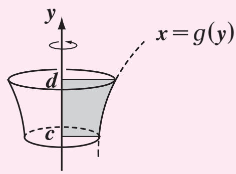
（Ⅰ）区間 $[a,\ b]$ で連続，区間 $(a,\ b)$ で微分可能な曲線 $y=f(x)$ と x 軸とで挟まれる図形を x 軸のまわりに回転してできる回転体の曲面の表面積 S は，次式で計算できる。

$$S=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$



（Ⅱ）区間 $[c,\ d]$ で連続，区間 $(c,\ d)$ で微分可能な曲線 $x=g(y)$ と y 軸とで挟まれる図形を y 軸のまわりに回転してできる回転体の曲面の表面積 S は，次式で計算できる。

$$S=2\pi\int_c^d x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dx$$



（Ⅰ）について，微小区間 $[x,\ x+\Delta x]$ における微小な曲面の表面積 ΔS は，図 12 より

$\Delta S \fallingdotseq 2\pi y\cdot\Delta L$ ………① と表せる。

ここで，微小な曲線の長さ ΔL は

$$\Delta L \fallingdotseq \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

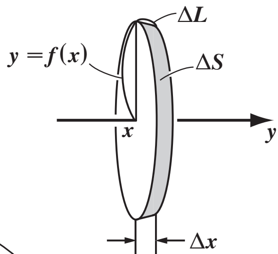
$$=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x \quad \cdots\cdots\cdots ②より$$

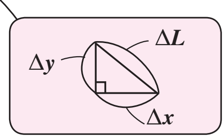
②を①に代入して

$$\Delta S \fallingdotseq 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x$$

よって，$\dfrac{\Delta S}{\Delta x} \fallingdotseq 2\pi y\sqrt{1+\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$

図 12 回転体の表面積 $\Delta S \fallingdotseq 2\pi y\cdot\Delta L$





ここで，$\Delta x \to 0$ のとき，$\dfrac{dS}{dx} = 2\pi y\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$ となるので，

この両辺を x で，区間 $[a,\ b]$ で積分することにより，この x 軸のまわりの回転体の曲面の表面積 S が，次式で求められるんだね。

$$S = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$
$$= 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$
$$= 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

実際の計算では，

$S = 2\pi\int_a^b \sqrt{y^2\cdot(1+y'^2)}\,dx$

$= 2\pi\int_a^b \sqrt{y^2+(yy')^2}\,dx$ として，

$y^2+(yy')^2$ を求めることが多い。

(Ⅱ) についても同様に，微小区間 $[y,\ y+\Delta y]$ における微小な曲面の表面積 ΔS は，図 13 より，近似的に

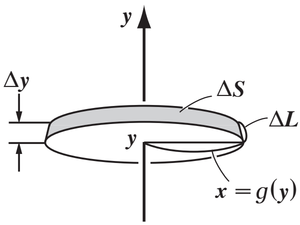
$\Delta S \fallingdotseq 2\pi x\cdot\Delta L$ ………③ と表せる。

ここで，微小な曲線の長さ ΔL は，

$\Delta L \fallingdotseq \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

$= \sqrt{1+\left(\dfrac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2}\,\Delta y$ ………④より，④を③に代入して

図 13　回転体の表面積
$\Delta S \fallingdotseq 2\pi x\cdot\Delta L$



$\Delta S \fallingdotseq 2\pi x\cdot\sqrt{1+\left(\dfrac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2}\,\Delta y$　　よって，$\dfrac{\Delta S}{\Delta y} \fallingdotseq 2\pi x\sqrt{1+\left(\dfrac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2}$

ここで，$\Delta y \to 0$ のとき，$\dfrac{dS}{dy} = 2\pi x\sqrt{1+\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2}$ となるので，

この両辺を y で，区間 $[c,\ d]$ で積分することにより，この y 軸のまわりの回転体の曲面の表面積 S は，次の式で計算できるんだね。

納得いった？

$$S = 2\pi\int_c^d x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$
$$= 2\pi\int_c^d x\sqrt{1+x'^2}\,dy$$
$$= 2\pi\int_c^d x\sqrt{1+\{g'(y)\}^2}\,dy$$

実際の計算では，

$S = 2\pi\int_c^d \sqrt{x^2\cdot(1+x'^2)}\,dy$

$= 2\pi\int_c^d \sqrt{x^2+(xx')^2}\,dy$ として，

$x^2+(xx')^2$ を求めることが多い。

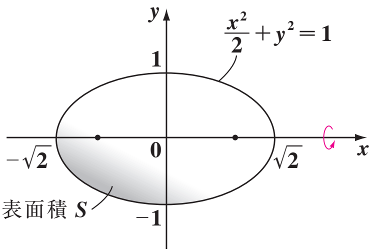
それでは，具体的に例題で，回転体の表面積を求めてみよう。

だ円 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ ………① を

$(-\sqrt{2} \leqq x \leqq \sqrt{2})$

x 軸のまわりに回転してできる回転体の表面積 S を求めよう。

公式より



$$S = 2\pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \underbrace{y\sqrt{1+y'^2}}_{\sqrt{y^2(1+y'^2)}=\sqrt{y^2+(yy')^2}}\, dx = 2\pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{y^2+(yy')^2}\, dx \quad \text{………②}$$ となる。

ここで，①の両辺を x で微分して，

$x+2yy'=0$ より $yy'=-\dfrac{x}{2}$ ………③

③の両辺を 2 乗して，y^2 をたすと，

$$\underbrace{y^2}_{1-\frac{x^2}{2}\text{(①より)}} + \underbrace{(yy')^2}_{-\frac{x}{2}\text{(②より)}} = 1-\frac{x^2}{2}+\left(-\frac{x}{2}\right)^2 = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{4} = 1-\frac{x^2}{4} \quad \text{………④}$$

④を②に代入すると，

$$S = 2\pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \underbrace{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}_{\text{偶関数}}\, dx = 4\pi\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\, dx \quad \text{………⑤}$$

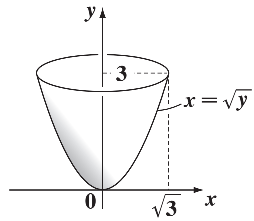
ここで，$\dfrac{x}{2}=\sin\theta$ とおくと，$x:0 \to \sqrt{2}$ のとき，$\theta:0 \to \dfrac{\pi}{4}$

また，$dx = 2\cos\theta\, d\theta$ より，⑤は，

$$S = 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \underbrace{\sqrt{1-\sin^2\theta}}_{\cos\theta}\cdot 2\cos\theta\, d\theta = 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\underbrace{1+\cos 2\theta}_{2\cos^2\theta})\, d\theta$$

$$= 4\pi\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 4\pi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) = \pi(\pi+2)$$ となって，

x 軸のまわりのだ円の回転体の表面積が求まるんだね。



では次，$y=x^2$ $(0 \leqq x \leqq \sqrt{3})$，すなわち曲線 $x=\sqrt{y}$ ………(a) $(0 \leqq y \leqq 3)$ を y 軸のまわりに回転してできる回転体の曲面の表面積 S を求めてみよう。

公式より

$$S = 2\pi\int_0^3 x\sqrt{1+x'^2}\,dy = 2\pi\int_0^3 \sqrt{x^2+(xx')^2}\,dy \quad \cdots\cdots\cdots(b)$$ となる。

(a) を y で微分して

$$x' = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \quad \cdots\cdots\cdots(c)$$ よって

$$\underbrace{x^2}_{y((a)\text{より})} + \underbrace{(xx')^2}_{\sqrt{\cancel{y}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\cancel{y}}}=\frac{1}{2}((a)(b)\text{より})} = y + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = y + \frac{1}{4} \quad \cdots\cdots\cdots(d)$$ となる。

(d) を (b) に代入すると

$$S = 2\pi\int_0^3 \sqrt{y+\frac{1}{4}}\,dy = 2\pi\int_0^3 \left(y+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} dy$$

$$= 2\pi\cdot\frac{2}{3}\left[\left(y+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3$$

$$= \frac{4}{3}\pi\left\{\left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}$$

$$= \frac{4}{3}\pi\cdot\frac{1}{\underbrace{4^{\frac{3}{2}}}_{2^3=8}}(13\sqrt{13}-1)$$

$= \dfrac{\pi}{6}(13\sqrt{13}-1)$　となって，y 軸のまわりの放物線の回転体の表面の面積も求められるんだね。

これで，曲線の回転体の表面積を求める問題の解法にも慣れて頂けたと思う。