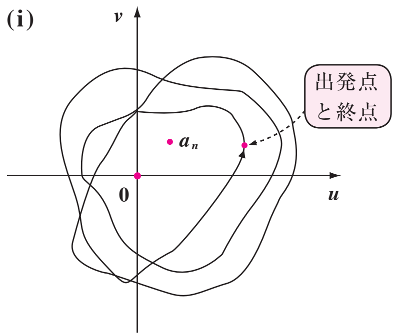
　これまで，$r >> 1$ として，$r(=|z|)$ を十分大きな定数と考えてきたけれど，今度は逆に，この r の値を 0 に限りなく近づけたときの $f_n(z)$ を調べてみよう。すると，$\displaystyle\lim_{r\to 0} z^k = \lim_{r\to 0} \underbrace{r^k}_{\boxed{0}} e^{ik\theta} = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots\cdots, n)$ より

$$\lim_{r\to 0} f_n(z) = \lim_{r\to 0}(\underbrace{\cancel{z^n}}_{\boxed{0}} + \cancel{a_1 \underbrace{z^{n-1}}_{\boxed{0}}} + \cancel{a_2 \underbrace{z^{n-2}}_{\boxed{0}}} + \cdots\cdots + \cancel{a_{n-1} \underbrace{z}_{\boxed{0}}} + a_n) = a_n$$

となる。

　したがって，r が十分大きいときから，r を 0 に近づけていくと，n 周していた閉曲線は図 3(i)，(ii) に示すように縮んで点 $a_n(\neq 0)$ を囲む閉曲線になるため，必ず，その過程で，原点 0 を通過するときが存在する。

図 3　r を 0 に近づけるときの $f_n(z)$ のグラフ



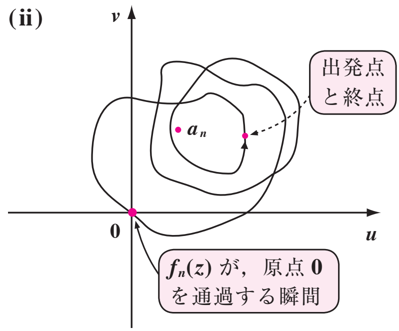


図 3 は，$n = 3$ のイメージ

　ここで，n 周する閉曲線が，$r \to 0$ の過程で，原点 0 を n 回通過するとは限らない。たとえば，
$f_3(z) = (z - i)^3 = 0$ のとき
$z = i$ (3 重解) をもつので，
3 重曲線 $f_3(z)$ が，$r \to 0$ の過程で，原点を通過するのは，1 回だけになる。

(これについては，後でそのグラフを具体的に示そう)

　しかし，いずれにせよ，少なくとも 1 回は，$f_n(z)$ の曲線は原点 0 を通過するので，そのときの z を $z = z_1$ とおくと，
$f_n(z_1) = 0$ をみたす z_1 が，少なくとも 1 つは存在することになる。

つまり，代数学の基本定理：

「z の n 次方程式 $f_n(z)=0$ は，少なくとも 1 つの複素数解 z_1 をもつ。」

が成り立つことが，示せたんだね。そして，これと同値な命題：

「z の n 次方程式 $f_n(z)=0$ は，n 個の複素数解をもつ」

が真であることも，同時に示せたんだね。納得いった？

理論的な解説はこれで終わったので，これから次に示す 4 つの具体例について，解説しよう。

(Ⅰ) 2 つの異なる解をもつ方程式の例

$g_2(z)=(z-i)(z-2)=0$　　　　解 $z=i$ と 2 をもつ

(Ⅱ) 2 重解をもつ方程式の例

$f_2(z)=(z-i)^2=0$　　　　2 重解 $z=i$ をもつ

(Ⅲ) 3 つの異なる解をもつ方程式の例

$g_3(z)=(z-1)(z+2)(z-3i)=0$　　　　解 $z=1,\ -2,\ 3i$ をもつ

(Ⅳ) 3 重解をもつ方程式の例

$f_3(z)=(z-i)^3=0$　　　　3 重解 $z=i$ をもつ

$z=re^{i\theta}(0\leqq\theta<2\pi)$ としたとき，様々な r の値に対して，曲線 $g_2(z), f_2(z), g_3(z), f_3(z)$ がどのような曲線を描くか，コンピューターで計算して，そのグラフを描くことにより，代数学の基本定理が成り立っていることを示そう。特に，(Ⅱ) の $f_2(z)$ の 2 重線や，(Ⅳ) の $f_3(z)$ の 3 重線が，原点 O を 1 度しか通らないで，縮小していくプロセスがヴィジュアル (視覚的) に分かるので，興味を持って頂けると思う。

尚，曲線全体を描くために，各グラフの縮尺率は，それぞれ適宜変更している。

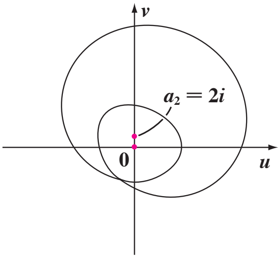
(Ⅰ) 2 つの異なる解 $z = i$ と 2 をもつ方程式：

$g_2(z) = (z-i)(z-2) = 0$ の場合

変数 $z = re^{i\theta}(0 \leqq \theta < 2\pi)$ の絶対値 r を $r = 4, 3, 2, 1, 0.5, 0.1$ と変化させたとき，コンピューターで求めた曲線 $g_2(z) = z^2 - (2+i)z + \underbrace{2i}_{a_2}$ のグラフを下に示そう。

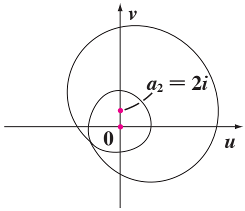
図 4　曲線 $g_2(z)$ のグラフ

(i) $r = 4$ のとき



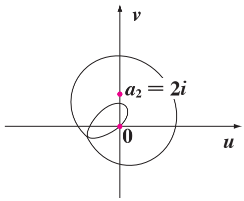
[$r = 4$ と，かなり小さな値だけれど，曲線 $g_2(z)$ は，まだ 0 と $a_2(=2i)$ の 2 点を 2 重に囲む閉曲線になっている。]

(ii) $r = 3$ のとき



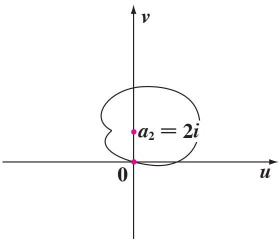
[$r = 4$ のときより，さらに r が小さくなっているが，まだ曲線 $g_2(z)$ は，0 と $a_2(=2i)$ の 2 点を 2 重に囲んでいる。]

(iii) $r = 2$ のとき



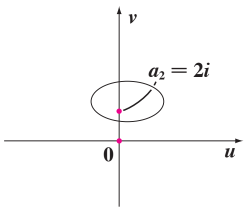
[$r = 2$ のとき，曲線 $g_2(z)$ が初めて，原点 0 を通過する。$g_2(z_1) = 0$ をみたす解 z_1 は，$z_1 = 2 = 2e^{i0}$ に対応する。]

(iv) $r = 1$ のとき



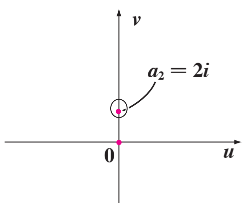
[$r = 1$ のとき，曲線 $g_2(z)$ は 2 回目に原点 0 を通過する。$g_2(z_2) = 0$ をみたす解 z_2 は，$z_2 = i = 1e^{i\frac{\pi}{2}}$ に対応する。]

(v) $r = 0.5$ のとき



[$r = 0.5$ のとき，曲線 $g_2(z)$ は，かなり縮小して，1 重の閉曲線となって点 $a_2(=2i)$ を囲むことが分かる。]

(vi) $r = 0.1$ のとき



[$r = 0.1$ になると，曲線 $g_2(z)$ はさらに縮小して，点 $a_2(=2i)$ を囲むさらに小さな閉曲線となることが分かる。]

どう？ 2 つの解 $z_1 = 2 \cdot e^{i0}$ と $z_2 = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$ の 2 解に対応して，$r = 2$ と $r = 1$ のときに，曲線 $g_2(z)$ が原点 0 を通ること，そして，$r \to 0$ のとき曲線 $g_2(z)$ が点 $a_2 = 2i$ に収束していくことが分かって，面白かったでしょう？

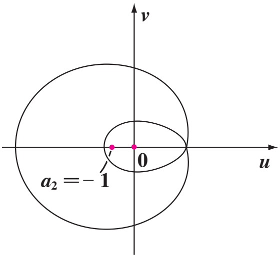
(Ⅱ) 重解 $z = i$ をもつ方程式：

$f_2(z) = (z - i)^2 = 0$ の場合

変数 $z = re^{i\theta}(0 \leqq \theta < 2\pi)$ の絶対値 r を $r = 4, 3, 2, 1, 0.5, 0.1$ と変化させたとき，コンピューターで求めた曲線 $f(z) = z^2 - 2iz \underbrace{\boxed{-1}}_{a_2}$ のグラフを下に示そう。

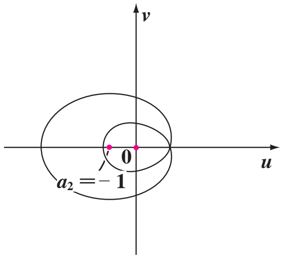
図 5　曲線 $f_2(z)$ のグラフ

(i) $r = 4$ のとき



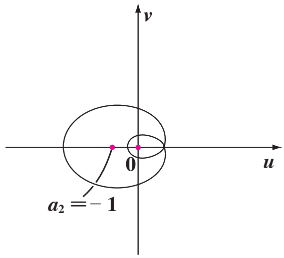
$r = 4$ と，かなり小さな値だけれど，曲線 $f_2(z)$ は，まだ 0 と $a_2(=-1)$ の 2 点を 2 重に囲む閉曲線になっている。

(ii) $r = 3$ のとき



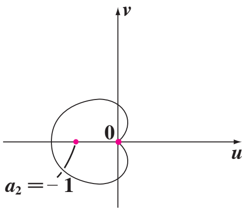
$r = 3$ のとき，さらに r が小さくなっているが，まだ曲線 $f_2(z)$ は 0 と $a_2(=-1)$ の 2 点を 2 重に囲んでいる。

(iii) $r = 2$ のとき



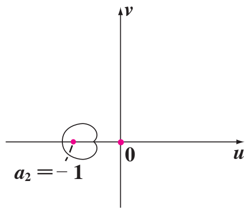
$r = 2$ となると，2 重の閉曲線の内の内側のものが小さくなって，原点 0 の付近を囲むようになっているのが分かる。

(iv) $r = 1$ のとき



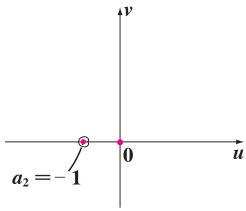
$r = 1$ のとき，曲線 $f_2(z)$ は，この 1 回だけ，原点 0 を通過する。$f_2(z_1) = 0$ をみたす解 z_1 は，$z_1 = i = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$ に対応する。

(v) $r = 0.5$ のとき



$r = 0.5$ のとき，曲線 $f_2(z)$ は，かなり縮小して，1 重の閉曲線となって，点 $a_2(=-1)$ を囲むことが分かる。

(vi) $r = 0.1$ のとき



さらに，r が小さくなって，$r = 0.1$ となると，閉曲線 $f_2(z)$ は，点 $a_2(=-1)$ を囲むさらに小さな閉曲線になる。

今回は，z の 2 次方程式が重解 i をもつ場合なので，初めに 2 重に 0 と a_2 を囲んでいた閉曲線が，$r \to 0$ で縮小していく際に，原点 0 を通過するのはただ 1 回のみなんだね。そのプロセスを図から理解して頂けたと思う。

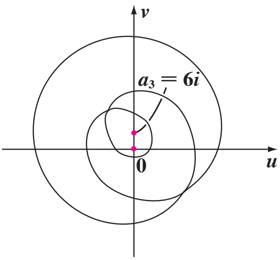
(Ⅲ) **3 つの異なる解 $z = 1,\ -2,\ 3i$ をもつ方程式：**

$g_3(z) = (z-1)(z+2)(z-3i) = 0$ の場合

変数 $z = re^{i\theta}(0 \leqq \theta < 2\pi)$ の絶対値 r を $r = 4, 3, 2, 1, 0.5, 0.1$ と変化させたとき，コンピュータで求めた曲線 $g_3(z) = z^3 + (1-3i)z^2 - (2+3i)z + \underbrace{6i}_{a_3}$ のグラフを下に示そう。

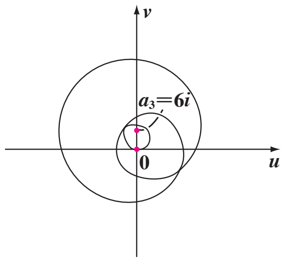
図 6　曲線 $g_3(z)$ のグラフ

(i) $r = 4$ のとき



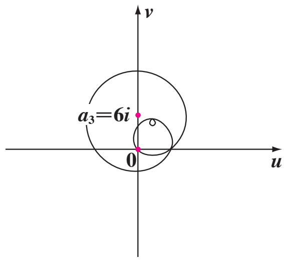
［$r = 4$ と，かなり小さな値だけれど，曲線 $g_3(z)$ は，まだ 0 と $a_3(=6i)$ の 2 点を 3 重に囲む閉曲線になっている。］

(ii) $r = 3$ のとき



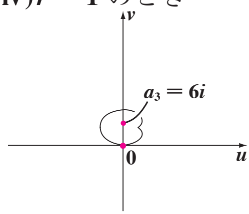
［$r = 3$ のとき，曲線 $g_3(z)$ は，初めて原点 0 を通過する。$g_3(z_1) = 0$ をみたす解は，$z_1 = 3i = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$ に対応する。］

(iii) $r = 2$ のとき



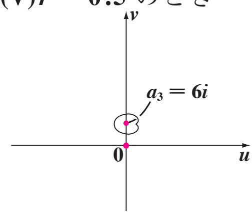
［$r = 2$ のとき，曲線 $g_3(z)$ は 2 回目に原点 0 を通過する。$g_3(z_2) = 0$ をみたす解は，$z_2 = -2 = 2 \cdot e^{i\pi}$ に対応する。］

(iv) $r = 1$ のとき



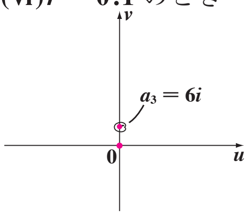
［$r = 1$ のとき，曲線 $g_3(z)$ は 3 回目に原点 0 を通過する。$g_3(z_3) = 0$ をみたす解は，$z_3 = 1 = 1 \cdot e^{i0}$ に対応する。］

(v) $r = 0.5$ のとき



［$r = 0.5$ のとき，曲線 $g_3(z)$ は，かなり縮小して，1 重の閉曲線となって，点 $a_3(=6i)$ を囲むことが分かる。］

(vi) $r = 0.1$ のとき



［さらに r が小さくなって，$r = 0.1$ になると，閉曲線 $g_3(z)$ は，点 $a_3(=6i)$ を囲むさらに小さな閉曲線になる。］

3 つの解 $z_1 = 3 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$，$z_2 = 2 \cdot e^{i\pi}$，$z_3 = 1 \cdot e^{i0}$ の 3 つの解に対応して，$r = 3$, 2，1 のときに，曲線 $g_3(z)$ が原点 0 を通ること，そして，$r \to 0$ のとき，閉曲線 $g_3(z)$ が点 $a_3 = 6i$ に向けて縮小されていくことが分かったんだね。

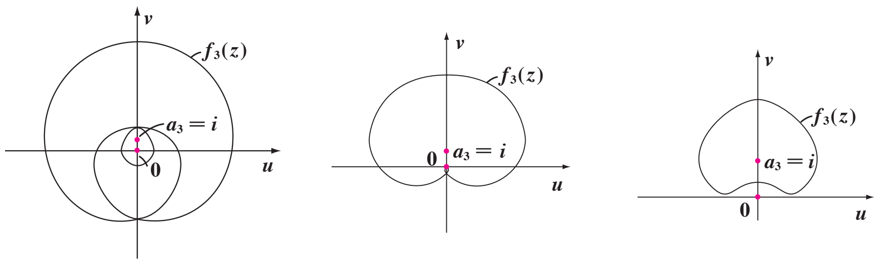
(Ⅳ) **3** 重解 $z = i$ をもつ方程式：

$f_3(z) = (z - i)^3 = 0$ の場合

まず，変数 $z = re^{i\theta}(0 \leqq \theta < 2\pi)$ の絶対値 r を $r = 3, 1, 0.5$ と変化させたとき，コンピュータで求めた曲線 $f_3(z) = z^3 - 3iz^2 - 3z + \underbrace{\boxed{i}}_{a_3}$ のグラフを下に示そう。

図 7　曲線 $f_3(z)$ のグラフ

(i) $r = 3$ のとき　　(ii) $r = 1$ のとき　　(iii) $r = 0.5$ のとき



［$r = 3$ と，かなり小さな値だけれど，まだ，**3** 重の閉曲線が **0** と $a_3(=i)$ を囲んでいる。］

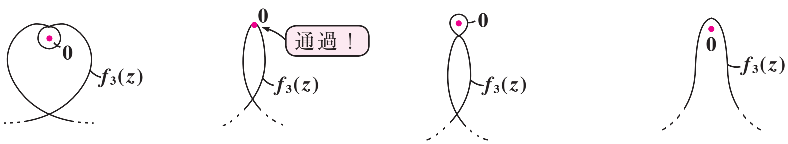
［$r = 1$ のとき，曲線 $f_3(z)$ は，この **1** 回だけ，原点 **0** を通過する。$f_3(z_1) = 0$ をみたす解 z_1 は，$z_1 = i = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$ に対応する。］

［r がさらに小さくなって，曲線 $f_3(z)$ は $a_3(=i)$ のみを **1** 重に囲む閉曲線になっているのがわかる。］

ここでさらに，$r = 1.2, 1, 0.9, 0.8$ のときの原点 **0** の付近の曲線 $f_3(z)$ を描くと，次の図 **8** のようになる。

図 8　曲線 $f_3(z)$ のグラフ

(i) $r = 1.2$ のとき　(ii) $r = 1$ のとき　(iii) $r = 0.9$ のとき　(iv) $r = 0.8$ のとき



このように，r が **3** から **0** に近づくとき，**3** 重の閉曲線 $f_3(z)$ は，原点 **0** を **1** 回だけ通過することが分かるんだね。当然 $f_3(z_1) = 0$ をみたす解 z_1 は，**3** 重解 $i = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}\left(r = 1,\ \theta = \frac{\pi}{2}\right)$ なんだね。**3** 重の閉曲線が点 $a_3 = i$ に向かって縮んでいくときに，ただ **1** 回のみ原点 **0** を通過するプロセスがヴィジュアルに分かって面白かったでしょう？