例題2 次の実三角関数の積分を，複素関数の1周線積分に変換して求めてみよう。

$$\int_0^{2\pi} \frac{6}{13-4\sqrt{3}\cos\theta}\,d\theta \quad \cdots\cdots ①$$

計算は，少し複雑になるけれど，前問と同様に，①を，
積分路 $C : |z| = 1$ 上の変数 $z = e^{i\theta}\ (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ での1周線積分に変換して解けばいいんだね。頑張ろう！
まず，$z = e^{i\theta}\ (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ とおくと，

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \quad \cdots\cdots ② \text{ であり，}$$

$$dz = i \cdot \underbrace{e^{i\theta}}_{z} d\theta \text{ より，} d\theta = \frac{1}{iz}\,dz \quad \cdots\cdots ③ \text{ である。}$$

②，③を①に代入して，これを z での1周線積分で求めると，

$$\int_0^{2\pi} \frac{6}{13-4\sqrt{3}\cos\theta}\,d\theta = \oint_C \frac{6}{13-4\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)} \cdot \frac{1}{iz}\,dz$$

$$= \frac{6}{i}\oint_C \frac{1}{13z - 2\sqrt{3}(z^2+1)}\,dz$$

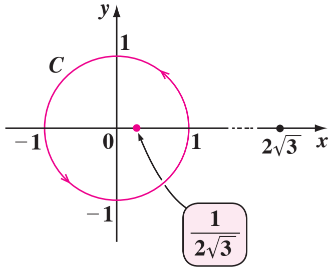
$$= \underbrace{-\frac{6}{i}}_{\frac{6i^2}{i} = 6i}\oint_C \frac{1}{2\sqrt{3}z^2 - 13z + 2\sqrt{3}}\,dz$$

分母の因数分解
$2\sqrt{3}z^2 - 13z + 2\sqrt{3}$
$2\sqrt{3}$ ╲╱ -1
1 ╱╲ $-2\sqrt{3}$

$$= 6i\oint_C \frac{1}{(2\sqrt{3}z-1)(z-2\sqrt{3})}\,dz$$

$$= \underbrace{\sqrt{3}i}_{\frac{6i}{2\sqrt{3}}} \cdot \oint_C \underbrace{\frac{1}{\left(z-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)(z-2\sqrt{3})}}_{f(z)}\,dz$$

ここで，$f(z)=\dfrac{1}{\left(z-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)(z-2\sqrt{3})}$ とおくと，



C 内の特異点は $z=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ のみであり，

これは，1 位の極である。

よって，この点における $f(z)$ の留数 R を求めると，

$$R=\operatorname*{Res}_{z=\frac{1}{2\sqrt{3}}} f(z)$$

$$=\lim_{z\to\frac{1}{2\sqrt{3}}}\left(z-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\cdot f(z)=\lim_{z\to\frac{1}{2\sqrt{3}}}\frac{1}{z-2\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{\dfrac{1}{2\sqrt{3}}-2\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{1-(2\sqrt{3})^2}=\frac{2\sqrt{3}}{1-12}=-\frac{2\sqrt{3}}{11}$$

以上より，留数定理を用いて，求める積分の値は，

$$\int_0^{2\pi}\frac{6}{13-4\sqrt{3}\cos\theta}\,d\theta=\sqrt{3}\,i\underbrace{\oint_C f(z)\,dz}_{\boxed{2\pi i\cdot R=2\pi i\cdot\left(-\frac{2\sqrt{3}}{11}\right)=-\frac{i\cdot 4\sqrt{3}\,\pi}{11}}}$$

$$=-\frac{\overset{(-1)}{i^2}\cdot 4(\sqrt{3})^2\cdot\pi}{11}=\frac{12\pi}{11}$$ となって，答えだ。

これで，実三角関数が分母にある場合の積分計算を，複素関数 $z=e^{i\theta}$ の 1 周線積分で置き換えて解く手法についても，自信が持てるようになったと思う。