演習問題 84 ●ラグランジュの未定乗数法●

$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 - 4 = 0$ ……① $(x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0, x_4 > 0)$ の制約条件の下，

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4$ ……② の最大値と，そのときの x_1, x_2, x_3, x_4 の値を，ラグランジュの未定乗数法を用いて求めよ。

ヒント！ $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ の条件の下，関数 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ の最大値を求めるためには，新たな関数 $h(x_1, x_2, x_3, x_4)$ を $h = f - \alpha g$ (α：未定乗数) により定義して，$h_{x_1} = 0$，$h_{x_2} = 0$，$h_{x_3} = 0$，$h_{x_4} = 0$ と $g = 0$ から α の値と x_1, x_2, x_3, x_4 の値を求め，これから f の最大値を求めることができるんだね。これを，ラグランジュの未定乗数法という。ラグランジュの未定乗数法により求められる x_1, x_2, x_3, x_4 の値のときの f の値は，本当は単に極値となる可能性のある値に過ぎないのだけれど，物理的，または図形的な判断により，これを最大値 (または最小値) とするんだね。

解答＆解説

$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 - 4 = 0$ ……① $(x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0, x_4 > 0)$ の条件の下，

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4$ ……② の最大値を，ラグランジュの未定乗数法により求める。

ここで，未定乗数 α を用いて新たな関数 $h(x_1, x_2, x_3, x_4)$ を次のように定義する。

$$h(x_1, x_2, x_3, x_4) = f(x_1, x_2, x_3, x_4) - \alpha g(x_1, x_2, x_3, x_4)$$
$$= x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 - \alpha(2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 - 4) \quad \cdots③$$

$h = f + \alpha g$ とおいてもよいが，$h = f - \alpha g$ とした方が後の計算で都合がいいんだね。

③を x_1, x_2, x_3, x_4 でそれぞれ偏微分して，0 とおくと，

$$h_{x_1} = \frac{\partial h}{\partial x_1} = 1 - \alpha \cdot 4x_1 = 0 \qquad \therefore x_1 = \frac{1}{4\alpha} \quad \cdots\cdots④$$

$$h_{x_2} = \frac{\partial h}{\partial x_2} = 2 - \alpha \cdot 2x_2 = 0 \qquad \therefore x_2 = \frac{1}{\alpha} \quad \cdots\cdots⑤$$

$$h_{x_3} = \frac{\partial h}{\partial x_3} = 2 - \alpha \cdot 2x_3 = 0 \qquad \therefore x_3 = \frac{1}{\alpha} \quad \cdots\cdots⑥$$

$h_{x_4} = \dfrac{\partial h}{\partial x_4} = 1 - \alpha \cdot 4x_4 = 0 \quad \therefore x_4 = \dfrac{1}{4\alpha}$ ……⑦ となる。

x_1, x_2, x_3, x_4 はすべて正だから，④，⑤，⑥，⑦より，$\alpha > 0$ である。

ここで，④，⑤，⑥，⑦を①に代入して，α の値を求めると，

$$\underbrace{2 \cdot \left(\frac{1}{4\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{4\alpha}\right)^2}_{\boxed{\frac{2}{16\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{2}{16\alpha^2} = \frac{1+8+8+1}{8\alpha^2} = \frac{18}{8\alpha^2} = \frac{9}{4\alpha^2}}} - 4 = 0$$ より，

$\dfrac{9}{4} \cdot \dfrac{1}{\alpha^2} = 4 \qquad \alpha^2 = \dfrac{9}{16}$ 　ここで，$\alpha > 0$ より，

$\alpha = \sqrt{\dfrac{9}{16}} = \dfrac{3}{4}$ ……⑧ である。

よって，⑧を④，⑤，⑥，⑦に代入して，x_1, x_2, x_3, x_4 の値を求めると，

$x_1 = \dfrac{1}{4 \times \frac{3}{4}} = \dfrac{1}{3}$ ……④′，　$x_2 = \dfrac{1}{\frac{3}{4}} = \dfrac{4}{3}$ …………⑤′

$x_3 = \dfrac{1}{\frac{3}{4}} = \dfrac{4}{3}$ …………⑥′，　$x_4 = \dfrac{1}{4 \times \frac{3}{4}} = \dfrac{1}{3}$ ……⑦′ となる。

よって，x_1, x_2, x_3, x_4 がそれぞれ④′，⑤′，⑥′，⑦′の値をとるとき，$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ は最大となる。

よって，$x_1 = \dfrac{1}{3}$，$x_2 = \dfrac{4}{3}$，$x_3 = \dfrac{4}{3}$，$x_4 = \dfrac{1}{3}$ のとき，$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ は

最大値 $f\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{3} + 2 \times \dfrac{4}{3} + 2 \times \dfrac{4}{3} + \dfrac{1}{3}$

$= \dfrac{1+8+8+1}{3} = \dfrac{18}{3} = 6$ をとる。………(答)