

次に、①より  $J_{\frac{1}{2}}(x)$  を求めよう。

$$\begin{aligned}
 J_{\frac{1}{2}}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma\left(k + \frac{3}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k + \frac{1}{2}} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\underbrace{k \cdot (k-1) \cdots 2 \cdot 1}_{k \text{ 項の積}} \cdot \underbrace{\left(k + \frac{1}{2}\right)\left(k - \frac{1}{2}\right) \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}}_{k+1 \text{ 項の積}} \cdot \underbrace{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}_{\sqrt{\pi}}} \cdot \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{2k+1}} \cdot x^{2k + \frac{1}{2}} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\underbrace{(2k) \cdot (2k-2) \cdots 4 \cdot 2}_{k \text{ 項の積}} \cdot \underbrace{(2k+1)(2k-1) \cdots 3 \cdot 1}_{k+1 \text{ 項の積}} \cdot \sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{2} \cdot x^{2k + \frac{1}{2}} \\
 &\quad \text{並べ替えて、} (2k+1) \cdot (2k) \cdot (2k-1) \cdot (2k-2) \cdots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = (2k+1)! \text{ だ。} \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left( \overset{k=0}{x} - \overset{k=1}{\frac{x^3}{3!}} + \overset{k=2}{\frac{x^5}{5!}} - \overset{k=3}{\frac{x^7}{7!}} + \cdots \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x
 \end{aligned}$$

計  $2k+1$  項の積の各項に、それぞれ2がかかる。

$\frac{x^{2k+1}}{\sqrt{x}}$

$\sin x$

$\therefore J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$  が導ける。納得いった?

さらに解説すると、 $n$  次の第2種のベッセル関数  $Y_n(x) = J_n(x) \int \frac{1}{x \{J_n(x)\}^2} dx$

は、より利用しやすい形で表現できる。ここでは、実用上よく使われる0次の第2種のベッセル関数  $Y_0(x)$  について示すと次のようになるんだね。

$$Y_0(x) = J_0(x) \cdot \log x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}\right) \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

この導出については、「演習 常微分方程式キャンパス・ゼミ」で詳しく解説しているので、興味のある方は学習されることを勧める。

最後に、第1種のベッセル関数  $J_n(x)$  の主な性質を下に示しておこう。

### 第1種のベッセル関数 $J_n(x)$ の性質

$n$  次の第1種のベッセル関数  $J_n(x)$  について、次の公式が成り立つ。

$$(i) J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

$$(ii) J_n(-x) = (-1)^n J_n(x) \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

$$(iii) J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x) \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

(i) の性質については、既に教えたね。(P226)

(ii) については、 $J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$  より、

この  $x$  に  $-x$  を代入して変形すると、

$$J_n(-x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{-x}{2}\right)^{2k+n}$$

$$\left(-1\right)^{2k+n} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} = \underbrace{(-1)^n}_{\because (-1)^{2k}=1} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \quad (\because (-1)^{2k}=1)$$

$$= \underbrace{(-1)^n}_{\because (-1)^{2k}=1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} = \underline{\underline{(-1)^n J_n(x)}} \quad \text{となって、}$$

(ii) の公式も成り立つことが分かる。

(iii) については、この右辺を変形して、左辺を導けばいいんだね。

$$\begin{aligned} ((iii) \text{の右辺}) &= \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x) \\ &= \frac{2n}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n-1+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n \cdot (-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n-1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k) \cdot (-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n-1} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{9!} = \frac{10}{10!} \text{ と変形できるので、同様に } \frac{1}{(n+k-1)!} = \frac{n+k}{(n+k)!} \text{ となる。}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \underbrace{\{n - (n+k)\}}_{(-k)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n-1} \quad \text{となる。よって、}$$

$$\begin{aligned}
 \text{((iii)の右辺)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(-1)^{k-1}}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n-1} \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n-1} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(k+1)+n-1} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+1+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n+1} \\
 &= J_{n+1}(x) = \text{((iii)の左辺)} \quad \text{となつて、(iii)の公式も導けた。}
 \end{aligned}$$

$k=0$  のとき,  
 $\frac{0 \cdot (-1)^{-1}}{0! \cdot n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} = 0$  より,  
 $k=1$  スタートにできる。

$k$  を  $k+1$  におきかえて,  
 もう一度  $k=0$  スタート  
 にした。

この (iii) の公式は、第 1 種のベッセル関数の漸化式になっているんだね。よつて、

・  $n=1$  のとき、 $J_2(x) = \frac{2}{x} \underline{J_1(x)} - \underline{J_0(x)}$

・  $n=2$  のとき、 $J_3(x) = \frac{4}{x} J_2(x) - J_1(x)$

・  $n=3$  のとき、 $J_4(x) = \frac{6}{x} J_3(x) - J_2(x)$

.....

となるので、初めに  $J_0(x)$  と  $J_1(x)$  を求めておけば、 $J_2(x)$ 、 $J_3(x)$ 、 $J_4(x)$ 、… は、この漸化式により代数的に求めることができるんだね。

これも面白かつたでしょう？

以上で「常微分方程式キャンパス・ゼミ」の講義は終了です！ みんな、よく頑張つたね (^0^)/ 盛りだく山の内容ではあつたけれど、できるだけ分かりやすく親切に解説したつもりだ。後は繰り返して練習して、完璧にマスターすることだ。大学の単位や、大学院の試験も、楽勝で乗り切れるはずだ。そして、これから様々な分野で出てくる常微分方程式に対しても自信をもって対処していけると思う。この講義を基に、読者の皆様がさらに飛躍・発展して行かれることを心より祈つています。

マセマ代表 馬場敬之 はいし