演習問題 42 ● 同時確率密度と周辺確率密度（Ⅰ）●

xy平面全体で定義された次のような同時確率密度$f_{XY}(x, y)$がある。

$$f_{XY}(x, y) = ce^{-x^2-2xy-4y^2} \quad \cdots\cdots ① \qquad (c：実数定数)$$

(1)定数cの値を求めよ。

(2)Xの周辺確率密度関数$f_X(x)$と, Yの周辺確率密度関数$f_Y(y)$を求めよ。

$\left(ただし, 積分公式 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-b)^2}dx = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}} を用いてもよい。\right)$

ヒント！ $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-b)^2}dx$ について, $x-b=z$ とおくと, x: $-\infty \to \infty$ のとき, z： $-\infty \to \infty$ $dx = dz$ より, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-b)^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-az^2}dz = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$ (演習問題 **41** を利用した。) となるんだね。(1) では, $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)\,dxdy = 1$(全確率) より, c の値を求める。(2) は, 公式 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)dy$, $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)\,dx$ を利用しよう。

解答＆解説

(1) ①の指数部： $-x^2-2xy-4y^2 = -\underbrace{(x+y)^2}_{u^2} - \underbrace{3y^2}_{v^2 とおく}$ より,

$\begin{cases} x+y=u \\ \sqrt{3}y=v \end{cases}$ とおくと $\begin{cases} x = u - \dfrac{1}{\sqrt{3}}v \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}v \end{cases}$ となる。

$y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}v$
$x = u - y = u - \dfrac{1}{\sqrt{3}}v$

よって, $e^{-x^2-2xy-4y^2} = e^{-u^2-v^2}$と変換できる。この交換のヤコビアン J は,

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad となる。$$

よって, ①を 2 重無限積分すると, x：$-\infty \to \infty$, y：$-\infty \to \infty$のとき,
u：$-\infty \to \infty$, v：$-\infty \to \infty$より

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)\,dxdy = c\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-2xy-4y^2}\,dxdy$$

$$= c\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2-v^2}\underbrace{|J|}_{\frac{1}{\sqrt{3}}}\,dudv = \frac{c}{\sqrt{3}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}du}_{\sqrt{\frac{\pi}{1}}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2}dv}_{\sqrt{\frac{\pi}{1}}}$$

$$= \frac{c}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\pi} = \boxed{\frac{\pi}{\sqrt{3}}c = 1}\ (\text{全確率})$$

公式 : $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

よって，求める定数 c は，$c = \frac{\sqrt{3}}{\pi}$ ………… ②である。……………………(答)

(2) ②を①に代入して，$f_{XY}(x, y) = \frac{\sqrt{3}}{\pi}e^{-x^2-2xy-4y^2}$ となる。

(ⅰ) X の周辺確率密度関数 $f_X(x)$ を求めると

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)\,dy = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-x^2-2xy-4y^2}}_{e^{-4\left(y^2+\frac{1}{2}x\cdot y+\frac{1}{16}x^2\right)-x^2+\frac{1}{4}x^2}}\,dy$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-\frac{3}{4}x^2}}_{\text{定数扱い}}\cdot e^{-4\left(y+\underbrace{\frac{1}{4}x}_{\text{定数扱い}}\right)^2}dy$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\pi}e^{-\frac{3}{4}x^2}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\left\{y-\left(-\frac{1}{4}x\right)\right\}^2}dy}_{\sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

公式 : $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-b)^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{3}{4}x^2}$$ ……………………………………………………(答)

(ⅱ) Y の周辺確率密度関数 $f_Y(y)$ を求めると

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)\,dx = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+\underbrace{y}_{\text{定数扱い}})^2}\cdot \underbrace{e^{-3y^2}}_{\text{定数扱い}}\,dx$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\pi}e^{-3y^2}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-1\cdot\{x-(-y)\}^2}dx}_{\sqrt{\frac{\pi}{1}}} = \sqrt{\frac{3}{\pi}}e^{-3y^2}$$ ……………………(答)

公式 : $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-b)^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

演習問題 43　● 同時確率密度と周辺確率密度（Ⅱ）●

xy平面全体で定義された次のような同時確率密度$f_{XY}(x, y)$がある。

$f_{XY}(x, y) = ce^{-x^2+4xy-8y^2}$ ……①　　(c：実数定数)

(1)定数cの値を求めよ。

(2)Xの周辺確率密度関数$f_X(x)$と，Yの周辺確率密度関数$f_Y(y)$を求めよ。

$\left(\text{ただし，積分公式} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-b)^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \text{ を用いてもよい。}\right)$

ヒント！ 演習問題42と同様に(1)は，$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)\,dxdy = 1$から$c$を求め，(2)は，それぞれの周辺確率密度関数$f_X(x)$，$f_Y(y)$の公式を使って求めればいい。

解答＆解説

(1) ①の指数部：$-x^2+4xy-8y^2 = -\underbrace{(x-2y)^2}_{u^2}-\underbrace{4y^2}_{v^2\text{とおく}}$ より，

$\begin{cases} x-2y = u \\ 2y = v \end{cases}$ とおくと $\begin{cases} x = u + \boxed{\text{ア}} \\ y = \dfrac{1}{2}v \end{cases}$ となる。

よって，$e^{-x^2+4xy-8y^2} = e^{-u^2-v^2}$と変換できる。この変換のヤコビアン$J$は，

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \boxed{\text{イ}} \\ 0 & \boxed{\text{ウ}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \quad \text{となる。}$$

よって，①を2重無限積分すると，x：$-\infty\to\infty$，y：$-\infty\to\infty$のとき，u：$-\infty\to\infty$，v：$-\infty\to\infty$より

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)\,dx\,dy = c\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+4xy-8y^2}dx\,dy$$

$$= c\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2-v^2}\underbrace{|J|}_{\frac{1}{2}}du\,dv = \frac{c}{2}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}du}_{\sqrt{\frac{\pi}{1}}}\ \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2}dv}_{\sqrt{\frac{\pi}{1}}}$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,\ y)dxdy = \frac{\pi c}{\boxed{\text{エ}}} = 1 \ (\text{全確率})$$

よって，求める定数 c は，$c = \dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\pi}$ …… ②である。 ………(答)

(2) ②を①に代入して，$f_{XY}(x,\ y) = \dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\pi} e^{-x^2+4xy-8y^2}$ となる。

(i) X の周辺確率密度関数 $f_X(x)$ を求めると

$$f_X(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,\ y)dy = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-x^2+4xy-8y^2}}_{= \, e^{-8\left(y^2-\frac{x}{2}y+\frac{x^2}{16}\right)-x^2+\frac{1}{2}x^2}} dy$$

$$= \frac{\boxed{\text{エ}}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-\frac{1}{2}x^2}}_{\text{定数扱い}} \cdot e^{-8\left(y-\underbrace{\frac{x}{4}}_{\text{定数扱い}}\right)^2} dy$$

公式：$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-b)^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

$$= \frac{\boxed{\text{エ}}}{\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-8\left(y-\frac{x}{4}\right)^2} dy}_{= \, \sqrt{\frac{\pi}{8}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{\boxed{\text{エ}}}{\pi} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\boxed{\text{オ}}}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$ ………………………………(答)

(ii) Y の周辺確率密度関数 $f_Y(y)$ を求めると

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,\ y)dx = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\underbrace{2y}_{\text{定数扱い}})^2} \cdot \underbrace{e^{-4y^2}}_{\text{定数扱い}} dx$$

$$= \frac{\boxed{\text{エ}}}{\pi} e^{-4y^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-1\cdot(x-2y)^2} dx}_{= \, \sqrt{\frac{\pi}{1}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\boxed{\text{カ}}}} e^{-4y^2}$$ ………………………………………………(答)

解答　(ア) ν　(イ) 1　(ウ) $\dfrac{1}{2}$　(エ) 2　(オ) 2π　(カ) π