Appendix (付録)

◆様々な正規直交関数系◆

これまでのフーリエ解析の講義で，$\underset{\text{大きさが}1}{\underline{\text{正規}}}$ $\underset{\text{互いに直交する}}{\underline{\text{直交}}}$ 関数系 $\{u_n(x)\}$，すなわち

$$\{u_n(x)\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\ \cdots\right\}\ (-\pi<x\leqq\pi)$$

について，その完全性も含めて詳しく解説してきた。そして，周期 2π の区分的に滑らかな任意の周期関数 $f(x)$ を，この正規直交系 $\{u_k\}$ の 1 次結合で $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n u_n=\alpha_0 u_0+\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\cdots$ のように表すことができることも示し，これにより，様々な偏微分方程式が解けることも示した。これがフーリエ級数展開による偏微分方程式の解法の重要なポイントだったんだね。

しかし，応用数学の分野では，このフーリエ級数以外にも様々な直交関数系が存在し，フーリエ級数と同様に微分方程式の解法に役立てられている。ここでは，フーリエ級数以外の一般的な直交関数系 (直交多項式) について，いくつか紹介しておこう。

● 直交多項式には重み関数が存在する！

ルジャンドルの微分方程式やエルミートの微分方程式など…，様々な微分方程式の解として，直交多項式 $\underset{\text{たとえば，}v_0(x),\ v_1(x),\ v_2(x),\ \cdots\ \text{のこと}}{\underline{\{v_n(x)\}}}$ が導き出される。ただし，この場合の直交性を表す式は，次のように “**重み関数**” (*weight function*) $\rho(x)$ を伴うことが一般的なんだね。

$$\int_a^b \underset{\text{重み関数}}{\underline{\rho(x)}}\,v_k(x)\,v_n(x)\,dx=C_n\delta_{kn}=\begin{cases}C_n & (k=n\ \text{のとき})\\ 0 & (k\neq n\ \text{のとき})\end{cases}\quad\cdots\cdots\cdots(*1)$$

(ただし，定義域：$a\leqq x\leqq b$，C_n：定数，δ_{kn}：クロネッカーのデルタ)

a，b は，$-\infty$ や $+\infty$ の場合もある。

$$\delta_{kn}=\begin{cases}1 & (k=n\ \text{のとき})\\ 0 & (k\neq n\ \text{のとき})\end{cases}$$

(ex1) ルジャンドル多項式は，$\{v_n(x)\}=\{P_n(x)\}$ と表し，

重み関数 $\rho(x)=1$，定義域：$-1\leqq x\leqq 1$，$C_n=\dfrac{2}{2n+1}$ より，$(*1)$ は，

$$\int_{-1}^{1}1\cdot P_k(x)P_n(x)\,dx=\frac{2}{2n+1}\cdot\delta_{kn}=\begin{cases}\dfrac{2}{2n+1} & (k=n\text{ のとき})\\ 0 & (k\neq n\text{ のとき})\end{cases}$$

となるんだね。

(ex2) ラゲール多項式は，$\{v_n(x)\}=\{L_n(x)\}$ と表し，

重み関数 $\rho(x)=e^{-x}$，定義域：$0\leqq x<\infty$，$C_n=1$ より，$(*1)$ は，

$$\int_0^{\infty}e^{-x}L_k(x)L_n(x)\,dx=\delta_{kn}=\begin{cases}1 & (k=n\text{ のとき})\\ 0 & (k\neq n\text{ のとき})\end{cases}$$

となる。

(ex3) エルミート多項式では，$\{v_n(x)\}=\{H_n(x)\}$ と表し，

重み関数 $\rho(x)=e^{-x^2}$，定義域：$-\infty<x<\infty$，$C_n=\sqrt{\pi}\,2^n n!$ より，$(*1)$ は，

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}H_k(x)H_n(x)\,dx=\sqrt{\pi}\,2^n n!\,\delta_{kn}=\begin{cases}\sqrt{\pi}\,2^n n! & (k=n\text{ のとき})\\ 0 & (k\neq n\text{ のとき})\end{cases}$$

となるんだね。

このように，フーリエ級数 $\{u_n(x)\}$ の正規直交条件の式：

$$\int_{-\pi}^{\pi}u_k(x)\,u_n(x)\,dx=\delta_{kn}=\begin{cases}1 & (k=n\text{ のとき})\\ 0 & (k\neq n\text{ のとき})\end{cases}\quad\cdots\cdots\cdots(*2)$$

とは，少し異なるんだけれど，$(*1)$ の式も書き変えると，

$$\int_a^b\underbrace{\sqrt{\frac{\rho(x)}{C_k}}\,v_k(x)}_{u_k(x)}\cdot\underbrace{\sqrt{\frac{\rho(x)}{C_n}}\,v_n(x)}_{u_n(x)}\,dx=\delta_{kn}=\begin{cases}1 & (k=n\text{ のとき})\\ 0 & (k\neq n\text{ のとき})\end{cases}\quad\cdots\cdots\cdots(*1)'$$

となる。よって，ここで，新たに $\{u_n(x)\}=\left\{\sqrt{\dfrac{\rho(x)}{C_n}}\,v_n(x)\right\}$ とおけば，$(*1)$ のフーリエ級数と同様の正規直交系の無限関数列が作れるんだね。

面白かった？