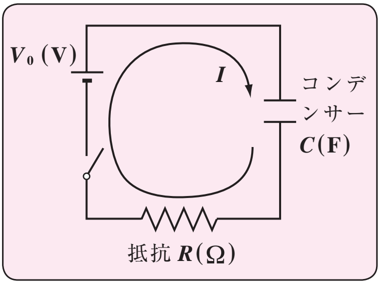
● *RC* 回路をラプラス変換で解いてみよう！



右に示すような例題 **36**(**P197**) で扱った *RC* 回路を，ラプラス変換で解いてみよう。電荷を $q(t)$ とおき，このラプラス変換を $Q(s)=\mathcal{L}[q(t)]$ とおこう。

> ラプラス変換では，原関数を小文字の $q(t)$，像関数を大文字で $Q(s)$ と表すことにする。

P197 で既に解説したように，$q(t)$ の微分方程式は，

$$\underbrace{V_0}_{\text{定数}} = \underbrace{R}_{\text{定数}}\dot{q}(t) + \frac{1}{\underbrace{C}_{\text{定数}}}q(t) \quad \cdots\cdots(\text{a})$$

（初期条件：$q(0)=0$）となる。

(a)の両辺をラプラス変換すると，

$$\mathcal{L}[V_0] = \mathcal{L}\left[R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t)\right]$$

よって，線形性より

$$V_0\underbrace{\mathcal{L}[1]}_{\frac{1}{s}} = R\underbrace{\mathcal{L}[\dot{q}(t)]}_{sQ(s)-\underbrace{\cancel{q(0)}}_{0}} + \frac{1}{C}\underbrace{\mathcal{L}[q(t)]}_{Q(s)}$$

> $\dot{q}(t)$ は $q'(t)$ と同じ

> $\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$
> $\mathcal{L}[\dot{q}(t)] = sQ(s)-q(0)$

$$\frac{V_0}{s} = R\cdot sQ(s) + \frac{1}{C}Q(s) \quad \cdots\cdots(\text{b})$$

$$\left(Rs+\frac{1}{C}\right)Q(s) = \frac{V_0}{s}$$

これから，$Q(s)$ を求めると，

$$Q(s) = \frac{V_0}{s\left(Rs+\frac{1}{C}\right)} = \frac{V_0}{R}\cdot\frac{1}{s\left(s+\frac{1}{RC}\right)} = \frac{V_0}{\cancel{R}}\cdot\cancel{R}C\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\right)$$

> 部分分数に分解した！

$$\therefore\ Q(s) = \underbrace{CV_0}_{\text{定数}}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{\underbrace{RC}_{\text{定数}}}}\right) \quad \cdots\cdots(\text{c})$$

> $Q(s)$ が求まったので，後は，これを逆変換するだけだね。

(c)の両辺をラプラス逆変換すると，

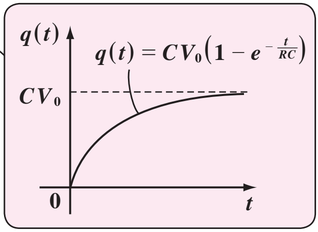
$$\underbrace{\mathcal{L}^{-1}[Q(s)]}_{q(t)} = \mathcal{L}^{-1}\left[CV_0\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\right)\right]$$

$$\begin{aligned} &CV_0\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\right] \\ &= CV_0\Bigg(\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]}_{\boxed{1}} - \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\right]}_{\boxed{e^{-\frac{1}{RC}t}}}\Bigg) \\ &= CV_0\left(1-e^{-\frac{1}{RC}t}\right) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]=1 \qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right]=e^{at}$$

$\therefore\ q(t) = CV_0\left(1-e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$　となって

P198 で求めた結果と一致するんだね。

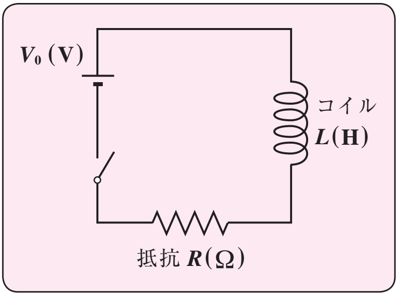


このように，時刻 t の領域では，(a)の微分方程式で表されていたものが，ラプラス変換した後の s の領域では，(b)のような s の代数方程式になってしまうところが，面白いんだね。そして(b)を解いて，$Q(s)=(s$ の式$)$ の形にした後，この両辺にラプラス逆変換を行えば，$q(t)$ が求まるんだね。このように，ラプラス変換と逆変換をうまく利用することにより，積分計算を一切行うことなく，$q(t)$ が求められるんだね。大丈夫だった？

ラプラス変換の手法は，イギリスの電気学者ヘヴィサイド (***Heaviside***) によって，文字通り，電気回路の電流や電圧などの過渡現象を調べるために考案された。彼は，複雑な微分方程式を解くことなく，簡単な代数計算 (四則演算 (＋，－，×，÷) と n 乗根の計算のこと) だけで，様々な問題を解いてみせたという。ヘヴィサイド自身は数学的な裏付けなしに，これらの手法を編み出したわけだから，まさに，天才的な直感力の持ち主だったと言えると思う。

● *RL* 回路もラプラス変換で解いてみよう！

ラプラス変換に慣れて頂くために，もう1題，右図に示すような例題37(P199)の *RL* 回路もラプラス変換で解いてみよう。ここでは，電流を $i(t)$ とおき，このラプラス変換を $I(s) = \mathcal{L}[i(t)]$ とおこう。



P199 で既に教えたように，$i(t)$ の微分方程式は，

$$\underbrace{V_0}_{\text{定数}} - \underbrace{L}_{\text{定数}}\frac{di(t)}{dt} = \underbrace{R}_{\text{定数}}\cdot i(t) \quad \cdots\cdots ①$$

(初期条件：$i(0) = 0$) となる。

①の両辺をラプラス変換すると，

$$\mathcal{L}\left[V_0 - L\frac{di(t)}{dt}\right] = \mathcal{L}[R\cdot i(t)]$$

$$V_0\underbrace{\mathcal{L}[1]}_{\frac{1}{s}} - L\underbrace{\mathcal{L}[\dot{i}(t)]}_{sI(s)-\underbrace{\cancel{i(0)}}_{0\,(\text{初期条件})}} = R\underbrace{\mathcal{L}[i(t)]}_{I(s)}$$ より，

$$\frac{V_0}{s} - L\cdot sI(s) = R\cdot I(s)$$ となる。

これを変形して，$I(s)$ を求めると，

$$(Ls+R)I(s) = \frac{V_0}{s}$$ より，

$$I(s) = \frac{V_0}{s(Ls+R)} = \frac{V_0}{L}\cdot\frac{1}{s\left(s+\frac{R}{L}\right)}$$

部分分数に分解した！

$$= \frac{V_0}{\cancel{L}}\cdot\frac{\cancel{L}}{R}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{R}{L}}\right)$$

$$\therefore\ I(s) = \frac{V_0}{R}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{R}{L}}\right) \cdots\cdots ② \quad となる。$$

$I(s)$ が，s の式として求まったので，後は，逆変換するだけだ。

②の両辺をラプラス逆変換すると，

$$\underbrace{\mathcal{L}^{-1}[I(s)]}_{i(t)} = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{V_0}{R}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{R}{L}}\right)\right]$$

$$\frac{V_0}{R}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{R}{L}}\right]$$

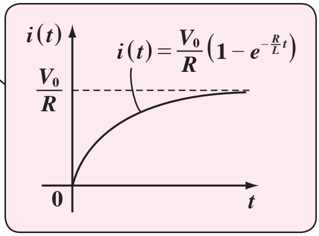
$$= \frac{V_0}{R}\left(\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]}_{1} - \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+\frac{R}{L}}\right]}_{e^{-\frac{R}{L}t}}\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = e^{at}$$

$$\therefore\ i(t) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \quad となって，$$

P200 で求めた結果と見事に一致するんだね。面白かったでしょう？



この *Appendix* では，ラプラス変換の入門ということで，本当に基礎的なものしか扱っていないんだけれど，これでも，ラプラス変換の威力を十分にご理解頂けたと思う。さらに，本格的なラプラス変換をマスターされたい方は，**「ラプラス変換キャンパス・ゼミ」（マセマ）**で是非勉強して頂きたい。

天才ヘヴィサイドが考案し，その後，カールソンやブロムウィッチ等，優秀な数学者によって洗練された理論として組み立てられた，奥深くて面白いこの“ラプラス変換”の世界を十分に堪能して頂けると思います。