$$Y(s) = -\frac{1}{s} + \frac{2}{s-1} - \frac{1}{s-2} \quad \cdots\cdots ②'$$

ここで，②の右辺を部分分数に分解した係数 a, b, c の値は次のように求めた。

$$-\frac{2}{s(s-1)(s-2)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s-1} + \frac{c}{s-2} \quad \cdots\cdots ③$$

・③の両辺に s をかけて，$s=0$ を代入すると，b と c の項は 0 となって a の値を求めることができる。これを次のように表す。

$$a = -\left.\frac{2}{(s-1)(s-2)}\right|_{s=0} = -\frac{2}{-1\times(-2)} = -\frac{2}{2} = -1$$

・同様に，③の両辺に $s-1$ をかけて，$s=1$ を代入して b を求めると

$$b = -\left.\frac{2}{s(s-2)}\right|_{s=1} = -\frac{2}{1\cdot(1-2)} = -\frac{2}{-1} = 2$$

・同様に，③の両辺に $s-2$ をかけて，$s=2$ を代入して c を求めると

$$c = -\left.\frac{2}{s(s-1)}\right|_{s=2} = -\frac{2}{2\cdot(2-1)} = -\frac{2}{2} = -1$$

②´の両辺について，ラプラス逆変換を行うと，

$$\underbrace{\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]}_{y(t)} = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{s} + 2\cdot\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-2}\right]$$

$$= -\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]}_{1} + 2\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]}_{e^t} - \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]}_{e^{2t}}$$

公式：

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = e^{at}$$

よって，求める解 $y(t)$ は，

$y(t) = -1 + 2e^t - e^{2t}$ となるんだね。大丈夫？

では，次に，証明は入れないけれど新たなラプラス変換とラプラス逆変換の基本公式を示そう。

・$\mathcal{L}[t] = \dfrac{1}{s^2}$ ……………………(＊3)　　・$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2}\right] = t$ ……………………(＊3)´

・$\mathcal{L}[e^{at}y(t)] = Y(s-a)$ ……(＊4)　　・$\mathcal{L}^{-1}[Y(s-a)] = e^{at}y(t)$ ……(＊4)´

では，これらの公式を利用して解く微分方程式の問題にもチャレンジしよう。

● **練習問題** ●

次の微分方程式をラプラス変換を使って解こう。(ただし，y は t の関数である)

(1) $y'' + y' + \dfrac{17}{4}y = 0$ ……①　$(y(0) = 0,\ y'(0) = 10)$

(2) $y'' + \dfrac{2}{3}y' + \dfrac{1}{9}y = 0$ ……②　$\left(y(0) = 1,\ y'(0) = \dfrac{5}{3}\right)$

(1) ①の両辺をラプラス変換すると，

$$\underbrace{\mathcal{L}\left[y'' + y' + \frac{17}{4}y\right]}_{\mathcal{L}[y''] + \mathcal{L}[y'] + \frac{17}{4}\mathcal{L}[y]} = \underbrace{\mathcal{L}[0]}_{0}$$

ここで, $y(t)$ のラプラス変換を $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$ とおいて, さらに変形すると,

$$\underbrace{\mathcal{L}[y'']}_{s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)} + \underbrace{\mathcal{L}[y']}_{sY(s) - y(0)} + \frac{17}{4}\underbrace{\mathcal{L}[y]}_{Y(s)} = 0$$

公式：
$\mathcal{L}[y'] = sY(s) - y(0)$
$\mathcal{L}[y''] = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$

$$s^2Y(s) - \cancel{s\underbrace{y(0)}_{0}} - \underbrace{y'(0)}_{10} + sY(s) - \cancel{\underbrace{y(0)}_{0}} + \frac{17}{4}Y(s) = 0$$

$$\left(s^2 + s + \frac{17}{4}\right)Y(s) = 10 \qquad Y(s) = \frac{10}{s^2 + s + \frac{17}{4}}$$

ここで，分母を $\left(s + \dfrac{1}{2}\right)^2 + 4$ と変形する。

$$\therefore\ Y(s) = \frac{10}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 4}$$ ……③　となる。

$Y(s)$ が求まったので，③を逆変換して，$y(t)$ を求めると，

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{10}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 4}\right] = e^{-\frac{1}{2}t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{10}{s^2 + 4}\right]$$ より，

公式：$\mathcal{L}^{-1}[F(s-a)] = e^{at}\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$

$$y(t) = 5e^{-\frac{1}{2}t}\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+2^2}\right]}_{\sin 2t} \qquad \text{公式}\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right] = \sin at$$

$\therefore\ y(t) = 5e^{-\frac{1}{2}t}\sin 2t$ となって，答えだ。

(2) ②の両辺をラプラス変換すると，$\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$ として，

$$\underbrace{\mathcal{L}[y'']}_{s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)} + \frac{2}{3}\underbrace{\mathcal{L}[y']}_{sY(s)-y(0)} + \frac{1}{9}\underbrace{\mathcal{L}[y]}_{Y(s)} = 0$$

$$s^2Y(s) - s\underbrace{y(0)}_{1} - \underbrace{y'(0)}_{\frac{5}{3}} + \frac{2}{3}\{sY(s) - \underbrace{y(0)}_{1}\} + \frac{1}{9}Y(s) = 0$$

$\left(s+\dfrac{1}{3}\right)$ でまとめることがポイント！

$$\left(s^2+\frac{2}{3}s+\frac{1}{9}\right)Y(s) = s+\frac{7}{3} \qquad \left(s+\frac{1}{3}\right)^2 Y(s) = \left(s+\frac{1}{3}\right)+2$$

$$\therefore\ Y(s) = \frac{\left(s+\frac{1}{3}\right)+2}{\left(s+\frac{1}{3}\right)^2} \quad \cdots\cdots ④$$ となる。

よって④を逆変換して，$y(t)$ を求めると，

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\left(s+\frac{1}{3}\right)+2}{\left(s+\frac{1}{3}\right)^2}\right] = e^{-\frac{1}{3}t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{s^2}\right]$$

公式：$\mathcal{L}^{-1}[F(s-a)] = e^{at}\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$

$$= e^{-\frac{1}{3}t}\left\{\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]}_{1} + 2\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]}_{t}\right\}$$

公式：$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s}\right] = 1$, $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2}\right] = t$

$\therefore\ y(t) = (1+2t)e^{-\frac{1}{3}t}$ と求められるんだね。これも大丈夫だった？

さらに，より本格的なラプラス変換を学んでみたい方は，「**ラプラス変換キャンパス・ゼミ**」**(マセマ)** で学習されることを勧める。