$n = k+1$ のとき，

$(*3)$ の左辺 $= 1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3$

$\frac{1}{4}k^2\cdot(k+1)^2$ （①より）

①は仮定した式なので，$n=k+1$ のときの証明に使える！

$$= \frac{1}{4}k^2(k+1)^2+(k+1)^3 \quad (①より)$$

$\frac{1}{4}(k+1)^2\cdot 4(k+1)$

$$= \frac{1}{4}(k+1)^2\{k^2+4(k+1)\}$$

$\frac{1}{4}(k+1)^2$ をくくり出した！

$k^2+4k+4=(k+2)^2$

$$= \frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2$$

$$= \frac{1}{4}(k+1)^2(k+1+1)^2 = (*3) \text{ の右辺}$$

これで，(ⅱ) $k+1$ 番目のドミノも倒した！バンザーイ！！

$\therefore$ $n=k+1$ のときも，$(*3)$ は成り立つ。

以上 (ⅰ)(ⅱ) より，すべての自然数 n に対して $(*3)$ は成り立つ。

どう？数学的帰納法を使えば，Σ 計算の重要公式もアッサリ証明できることが分かっただろう。

ン？数学的帰納法による証明は分かったけれど，どのようにして，公式：$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$ や $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ が導き出されるのかを知りたいって!? 向学心旺盛だね。今のキミなら理解できるだろうから，これらの公式も参考として導いてみせてあげよう。

参考

(Ⅰ) $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$ ……$(*1)$ の導出について，まず次の Σ 計算

$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^2-k^2\}$ ……① を考えてみよう。

(ⅰ) ①を実際に計算してみると，

$$\sum_{k=1}^{n}\{\underbrace{(k+1)^2-k^2}_{\cancel{k^2}+2k+1-\cancel{k^2}=2k+1}\}=\sum_{k=1}^{n}(2k+1)=2\sum_{k=1}^{n}k+\underbrace{\sum_{k=1}^{n}1}_{1+1+\cdots+1=n\cdot 1=n}$$

$$=2\sum_{k=1}^{n}k+n \quad \cdots\cdots①' \text{ となる。}$$

(ⅱ) 次に，①について，$I_k=k^2$，$I_{k+1}=(k+1)^2$ とおくと，

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^2-k^2\}=\sum_{k=1}^{n}(I_{k+1}-I_k)=-\underbrace{\sum_{k=1}^{n}(I_k-I_{k+1})}_{(I_1-\cancel{I_2})+(\cancel{I_2}-\cancel{I_3})+(\cancel{I_3}-\cancel{I_4})+\cdots+(\cancel{I_n}-I_{n+1})}$$

$$=-(I_1-I_{n+1})=I_{n+1}-I_1=\underbrace{(n+1)^2-1^2}_{n^2+2n+\cancel{1}-\cancel{1}=n^2+2n}=n^2+2n \quad \cdots\cdots①''$$

が導ける。

ここで，①′と①″は等しいので，

$2\sum_{k=1}^{n}k+n=n^2+2n$ より，$2\sum_{k=1}^{n}k=n^2+n=n(n+1)$

∴公式：$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$ …(＊1) が導けるんだね。大丈夫だった？

(Ⅱ) $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ ……(＊2) の導出についても同様に，

$\sum_{k=1}^{n}\{\underbrace{(k+1)^3}_{J_{k+1}}-\underbrace{k^3}_{J_k}\}$ …②を考える。これを同じ様に2通りで計算してみると，

(ⅰ) $$\sum_{k=1}^{n}\{\underbrace{(k+1)^3-k^3}_{\cancel{k^3}+3k^2+3k+1-\cancel{k^3}=3k^2+3k+1}\}=\sum_{k=1}^{n}(3k^2+3k+1)$$

$$=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\underbrace{\sum_{k=1}^{n}k}_{\frac{1}{2}n(n+1)\ ((＊1)\text{より})}+\underbrace{\sum_{k=1}^{n}1}_{n}$$

$$=3\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{3}{2}n(n+1)+n \quad \cdots\cdots②' \text{ が導けるんだね。}$$

(ii) 次に，$J_k = k^3$，$J_{k+1} = (k+1)^3$ とおいて②を計算すると，

$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^3 - k^3\} = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{3}{2}n(n+1) + n$ …②´

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^3 - k^3\} = -\sum_{k=1}^{n}(J_k - J_{k+1})$$

$$= -(J_1 - J_{n+1}) = J_{n+1} - J_1 = \underbrace{(n+1)^3 - 1^3}_{n^3+3n^2+3n+\cancel{1}-\cancel{1}=n^3+3n^2+3n}$$

$$= n^3 + 3n^2 + 3n \quad \cdots\cdots ②´´ \text{ となる。}$$

ここで，②´と②´´は等しいので，

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{3}{2}n(n+1) + n = n^3 + 3n^2 + 3n$$

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = \underbrace{n^3 + 3n^2 + 3n - \frac{3}{2}(n^2+n) - n}_{n^3+3n^2+3n-\frac{3}{2}n^2-\frac{3}{2}n-n=n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n=\frac{1}{2}n(2n^2+3n+1)} \text{ より，}$$

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{2}n(2n^2+3n+1) = \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$$

$$\begin{matrix}1 & & 1\\ 2 & & 1\end{matrix}$$

$\therefore$ 公式：$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ ……$(*2)$ も導けた！

どう？面白かった？

それでは，数学的帰納法に話を戻して，もう 1 題，問題を解いておこう。

練習問題 38	数学的帰納法 (Ⅲ)	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

すべての自然数 n に対して，「$2^{3n} - 3^n$ は 5 の倍数である。…$(*4)$」が成り立つことを，数学的帰納法を使って証明せよ。

たしかに，$n = 1$ のとき $2^3 - 3^1 = 8 - 3 = 5$，$n = 2$ のとき $2^6 - 3^2 = 64 - 9 = 55$ となって，5 の倍数なのは分かるね。でも，$n = 3, 4, 5, 6, \cdots$ のすべての自然数 n に対して $2^{3n} - 3^n$ が 5 の倍数であることを示すには，数学的帰納法しかないんだね。少し難しいかも知れないけど，これでさらに理解が深まるよ。