

(ii) $\lambda_2 = -3$ のとき, ①を $T_2 \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$ とおき, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$ とおくと,

$$\begin{bmatrix} 4 & 2i \\ -2i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \left[\begin{array}{cc} 4 & 2i \\ -2i & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc} -2i & 1 \\ -2i & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc} -2i & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \} r=1$$

$$-2i\beta_1 + \beta_2 = 0$$

ここで, $\beta_1 = k_2$ とおくと,

$$\beta_2 = 2k_2 i$$

$$\therefore \mathbf{x}_2 = k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix}$$

ここで, $k_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ とおくと, \mathbf{x}_2 は
正規化される。これを \mathbf{u}_2 とおくと,

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}'_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} \text{ とおくと,}$$

$$\|\mathbf{x}'_2\|^2 = \mathbf{x}'_2 \bar{\mathbf{x}}'_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix}$$

$$= 1 \cdot 1 + 2i \cdot (-2i) = 5$$

$$\therefore \|\mathbf{x}'_2\| = \sqrt{5} \text{ より,}$$

$$k_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ とおけばいい。}$$

以上 (i), (ii) より, ユニタリ行列 U_V を

$$U_V = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2] = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2i & 1 \\ 1 & 2i \end{bmatrix} \text{ とおくと, エルミート行列 } A_H \text{ は,}$$

$$U_V^{-1} A_H U_V = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \text{ と, 対角化される。} \dots\dots\dots (\text{答})$$

$U_V^{-1} A_H U_V$ を具体的に計算して, 上記の答えと一致することを確認しておこう。

$$\bar{U}_V = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2i & 1 \\ 1 & -2i \end{bmatrix} \quad \therefore U_V^{-1} = \bar{U}_V = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2i & 1 \\ 1 & -2i \end{bmatrix}$$

$$\therefore U_V^{-1} A_H U_V = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -2i & 1 \\ 1 & -2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2i \\ -2i & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2i & 1 \\ 1 & 2i \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -4i & 2 \\ -3 & 6i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2i & 1 \\ 1 & 2i \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \text{ となって, 間違いはないね。}$$