ここでさらに，これらの積分公式と漸化式の関係についても解説しておこう。

$$I_0 = \int_0^\infty e^{-ax^2}dx = \int_0^\infty \underbrace{x^0}_{1} \cdot e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad \cdots\cdots(*t_0)'$$

$$I_2 = \int_0^\infty x^2 e^{-ax^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^{\frac{3}{2}}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*t_0)''$$

$$I_4 = \int_0^\infty x^4 e^{-ax^2}dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{8a^{\frac{5}{2}}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*t_0)''' \quad (a：正の定数)$$

とおくと，この数列 $\{I_{2n}\}$ の一般項 I_{2n} は， $I_{2n} = a_n$ と考えると，分かりやすいかもしれない。

$I_{2n} = \int_0^\infty x^{2n}e^{-ax^2}dx$ ……⓪ (n = 0, 1, 2…) と表せる。よって，ここで，

I_{2n+2} と I_{2n} の関係式，すなわち数列 $\{I_{2n}\}$ の 2 項間の漸化式を導いてみよう。

$$I_{2n+2} = \int_0^\infty x^{2n+2}e^{-ax^2}dx = -\frac{1}{2a}\int_0^\infty x^{2n+1}\underbrace{(-2ax)e^{-ax^2}}_{(e^{-ax^2})'}dx$$

$$= -\frac{1}{2a}\int_0^\infty x^{2n+1}(e^{-ax^2})'dx$$

部分積分法

$$\int_a^b f\cdot g'dx = [f\cdot g]_a^b - \int_a^b f'\cdot g\,dx$$

$$= -\frac{1}{2a}\left\{\underbrace{\cancel{\left[x^{2n+1}\cdot e^{-ax^2}\right]_0^\infty}}_{\lim_{p\to\infty}\left[x^{2n+1}e^{-ax^2}\right]_0^p = \lim_{p\to\infty}\frac{p^{2n+1}}{e^{ap^2}} = 0} - \int_0^\infty (2n+1)\cdot x^{2n}\cdot e^{-ax^2}dx\right\}$$

ロピタルの定理を用いてもよい。

$$= \frac{2n+1}{2a}\underbrace{\int_0^\infty x^{2n}e^{-ax^2}dx}_{I_{2n}} = \frac{2n+1}{2a}\cdot I_{2n}$$

以上より，数列 $\{I_{2n}\}$ の漸化式が次のように導けるんだね。

$$I_{2n+2} = \frac{2n+1}{2a}\cdot I_{2n} \quad \cdots\cdots① \quad (n = 0, 1, 2, 3\cdots)$$

この①を利用すれば，初項である $I_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ ……$(*t_0)'$ さえ与えられていれば，$(t_0)''$ や $(t_0)'''$ の積分公式は次のように簡単に導くことができる。

・$n=0$ のとき，①より

$$I_{\underbrace{2}_{2\times0+2}}=\int_0^\infty x^2e^{-ax^2}dx=\frac{\cancel{2\cdot0}+1}{2a}\underbrace{I_0}_{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\ ((*\,t_0)'\text{より})}=\frac{1}{2a}\times\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}=\frac{\sqrt{\pi}}{4a^{\frac{3}{2}}}\quad\cdots\cdots(*\,t_0)''$$ となって

$(*\,t_0)''$ の積分公式が導けた。次に，

・$n=1$ のとき，①より

$$I_{\underbrace{4}_{2\times1+2}}=\int_0^\infty x^4e^{-ax^2}dx=\frac{2\cdot1+1}{2a}\cdot\underbrace{I_2}_{\frac{\sqrt{\pi}}{4a^{\frac{3}{2}}}\ ((*\,t_0)''\text{より})}=\frac{3}{2a}\times\frac{\sqrt{\pi}}{4a^{\frac{3}{2}}}=\frac{3\sqrt{\pi}}{8a^{\frac{5}{2}}}\quad\cdots\cdots(*\,t_0)'''$$ となって

$(*\,t_0)'''$ の積分公式もアッという間に導けるんだね。

さらに，この操作を続けると，

・$n=2$ のとき，①より

$$I_6=\int_0^\infty x^6e^{-ax^2}dx=\frac{2\cdot2+1}{2a}\cdot\underbrace{I_4}_{\frac{3\sqrt{\pi}}{8a^{\frac{5}{2}}}\ ((*\,t_0)'''\text{より})}=\frac{5}{2a}\times\frac{3\sqrt{\pi}}{8a^{\frac{5}{2}}}=\frac{15\sqrt{\pi}}{16a^{\frac{7}{2}}}\quad\cdots\cdots(*)$$ となるし

・$n=3$ のとき，①より

$$I_8=\int_0^\infty x^8e^{-ax^2}dx=\frac{2\cdot3+1}{2a}\cdot\underbrace{I_6}_{\frac{15\sqrt{\pi}}{16a^{\frac{7}{2}}}\ ((*)\text{より})}=\frac{7}{2a}\times\frac{15\sqrt{\pi}}{16a^{\frac{7}{2}}}=\frac{105\sqrt{\pi}}{32a^{\frac{9}{2}}}\quad\cdots\cdots(**)$$ となる。

このように，次々と積分公式を導くことができるんだね。面白かったでしょう？

物理学でも，特に量子力学では，この漸化式の考え方が利用されることが多いので，ここでシッカリ練習しておこう！