§3. 数値解析入門

これまで，様々な偏微分方程式をフーリエ解析により，解析的に解を求める手法について詳しく解説してきた。しかし，実はそれ以外にも“**差分方程式**”を作って，コンピュータ·プログラムにより，偏微分方程式を“**数値解析**”により近似的に解く手法もあるんだね。

ここでは，この数値解析の入門として，**1** 次元熱伝導方程式の差分方程式を導き，これを利用して **BASIC** プログラムにより，ある初期温度分布がどのように経時変化していくのか，(ⅰ) 放熱条件の場合と (ⅱ) 断熱条件の場合のそれぞれについて，数値解析の結果のグラフを示そうと思う。

● 熱伝導方程式の差分方程式を求めよう！

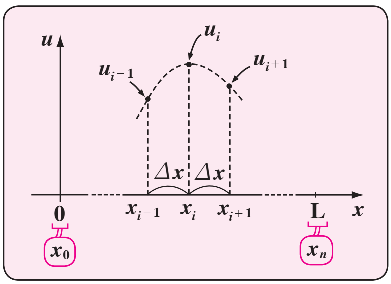
それではまず，**1** 次元熱伝導方程式：

$\dfrac{\partial u}{\partial t} = a \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ……① （a：温度伝導率） の差分方程式を導いてみよう。

①の温度 u は，時刻 t と位置変数 x の **2** 変数関数なので，$u = u(x,\ t)$ と表される。ここで，差分方程式とは①の近似方程式のことなので，①の左・右両辺の近似式を導いてみる。

(ⅰ)(①の左辺) $= \dfrac{\partial u}{\partial t} \fallingdotseq \dfrac{\Delta u}{\Delta t}$ ← $\boxed{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta t} = \dfrac{\partial u}{\partial t}}$

$= \dfrac{u(x,\ t+\Delta t) - u(x,\ t)}{\Delta t}$ ……② となる。数値解析では，この位置 x の範囲 $0 \leqq x \leqq L$ を n 等分に分割して，$x_i = i \cdot \Delta x$ ($i = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ n \cdot \Delta x = L$) として，各位置 x_i における温度を，右図に示すように u_i ($i = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$) で表す。さらに，時刻 t を旧時刻，$t + \Delta t$ を新時刻とおくことにすると，②は次のようにシンプルに表すことができるんだね。



新時刻　旧時刻

$$(\text{①の左辺}) \fallingdotseq \frac{\boldsymbol{u_i} - \boldsymbol{u_i}}{\Delta t} \quad \cdots\cdots ③$$

(ii)
$$(\text{①の右辺}) = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$
$$\fallingdotseq \frac{a}{\Delta x}\cdot\left\{\frac{u(x+\Delta x,\ t)-u(x,\ t)}{\Delta x} - \frac{u(x,\ t)-u(x-\Delta x,\ t)}{\Delta x}\right\} \quad \cdots ④$$
となる。

ここで, 時刻はすべて旧時刻 t であり, $x_{i+1} = x + \Delta x$, $x_i = x$, $x_{i-1} = x - \Delta x$ に対応する温度 u を, 右上図に示すように, それぞれ u_{i+1}, u_i, u_{i-1} とおくと, ④も次のようにシンプルな近似式：

$$(\text{①の右辺}) \fallingdotseq \frac{a}{\Delta x}\left(\frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x} - \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}\right)$$

u_{i+1}, u_i, u_{i-1} はすべて旧時刻 t における値

$$= \frac{a}{(\Delta x)^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \quad \cdots\cdots ⑤$$
で表すことができる。

よって, ③, ⑤を①に代入してまとめると,

$$\frac{u_i - u_i}{\Delta t} = \frac{a}{(\Delta x)^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})$$
となって, ①の差分方程式は,

$$u_i = u_i + \underbrace{\frac{a\cdot\Delta t}{(\Delta x)^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})}_{\text{すべて, 旧時刻 } t} \quad \cdots ⑥ \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1)$$
となる。

新時刻 $t+\Delta t$

⑥式の右辺は, すべて旧時刻 t の式であり, 左辺は新時刻 $t+\Delta t$ の式である。

ここで, 時刻 $t=0$ のときの温度分布を初期条件とし, また (i) 放熱条件や (ii) 断熱条件などの境界条件が与えられると, ⑥式を利用して温度分布の経時変化を調べることができる。より具体的に示すと,

(i) $t=0$ のときの初期条件の温度分布 u_{i-1}, u_i, u_{i+1} を旧時刻の温度分布として, ⑥の右辺に代入して, $t = 0 + \Delta t = \Delta t$ 秒後の新温度分布 u_i $(i = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ を算出する。

(ii) $t = \Delta t$ のときの温度分布 u_{i-1}, u_i, u_{i+1} を旧時刻の温度分布として, ⑥の右辺に代入して, $t = \Delta t + \Delta t = 2\cdot\Delta t$ 秒後の新温度分布 u_i $(i = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ を算出する。

(iii) $t = 2\cdot\Delta t$ のときの温度分布 u_{i-1}, u_i, u_{i+1} を旧時刻の温度分布として, ⑥の右辺に代入して, $t = 2\cdot\Delta t + \Delta t = 3\cdot\Delta t$ のときの温度分布 u_i $(i = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ を算出する。

以下同様に，$t=4\cdot\Delta t,\ 5\cdot\Delta t,\ 6\cdot\Delta t,\ \cdots$における温度分布 u_i の経時変化の様子を⑥式により算出していくことができるんだね。これで，プログラムによる計算のアルゴリズム(手順)をご理解頂けたと思う。

それでは，具体例として(i)放熱条件と(ii)断熱条件の **2** つの境界条件について，**1** 次元熱伝導方程式を解いた結果を示そう。

● 1次元熱伝導方程式(放熱条件)の数値解を示そう！

それでは，具体例として次の例題の **1** 次元熱伝導方程式の数値解析の結果を示そう。

> **例題 1**　次の **1** 次元熱伝導方程式を，与えられた初期条件と境界条件(放熱条件)の下で，数値解析により解け。
>
> $$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ \cdots\cdots①\quad(0<x<1,\ t>0)$$ ←定数 $\alpha=1$ とした
>
> 境界条件：$u(0,\ t)=u(1,\ t)=0$ ←放熱条件
>
> 初期条件：$u(x,\ 0)=\begin{cases}10 & \left(0<x\leqq\frac{1}{2}\right)\\ 0 & \left(\frac{1}{2}<x\leqq 1\right)\end{cases}$

この問題を $\Delta x=10^{-2}$，$\Delta t=10^{-5}$ として，数値解析した結果，図 **1** の初期条件(初期温度分布)が，時刻 t の経過と共に放熱条件により，図 **2** に示すように零分布に近づいていく様子が分かるんだね。この結果は同じ問題を解析的に解いた **P172** の結果とほぼ一致する。

図 **1**　初期条件

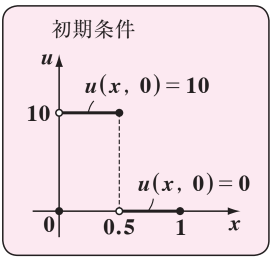
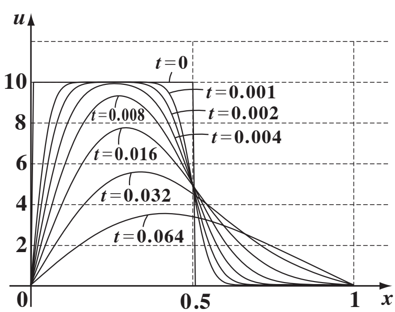


図 **2**　温度分布の経時変化(放熱条件)



● 1 次元熱伝導方程式（断熱条件）の数値解を示そう！

次に，断熱条件の境界条件の下，1 次元熱伝導方程式の数値解を示そう。

例題 2　次の 1 次元熱伝導方程式を与えられた初期条件と境界条件（断熱条件）の下で，数値解析により解け。

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ \cdots\cdots①\quad (0<x<1,\ t>0)$$ ←定数 $\alpha=1$ とした

境界条件：$\frac{\partial u(0,\ t)}{\partial x}=\frac{\partial u(1,\ t)}{\partial x}=0$ ←断熱条件

初期条件：$u(x,\ 0)=\begin{cases}10 & \left(0\leqq x\leqq\frac{1}{2}\right)\\ 0 & \left(\frac{1}{2}<x\leqq 1\right)\end{cases}$

この問題は，境界条件以外は例題 1 と同じ問題なんだね。同様に $\Delta x=10^{-2}$，$\Delta t=10^{-5}$ として，数値解析を行った結果を初期条件と共に，図 3，図 4 に示す。

図 3　初期条件

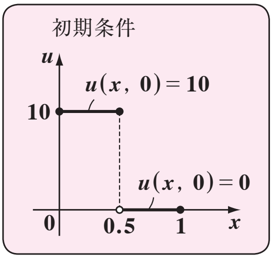
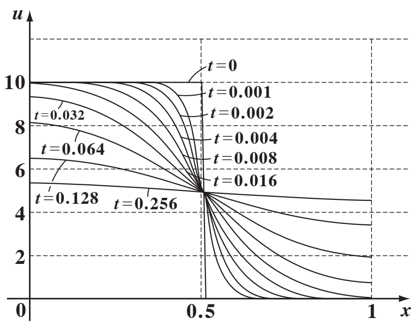


図 4　温度分布の経時変化（断熱条件）



今回は，境界（$x=0$ と $x=1$）において断熱条件なので，図 4 に示すように温度分布は時刻の経過と共に，零分布に近づくのではなく，一様分布に近づいていくんだね。

例題 1 の放熱条件をプログラムで表すと，$\underline{u_0=0}$，$\underline{u_n=0}$ であり，
$x=0$ と $x=1$ での温度が 0

例題 2 の断熱条件をプログラムで表すと，$\underline{u_0=u_1}$，$\underline{u_{n-1}=u_n}$ であるんだね。
$x=0$ と $x=1$ での温度勾配が 0

ただこれだけで，まったく異なる温度分布の経時変化が現れるんだね。この数値解析をさらに楽しみたい方はマセマの **「数値解析キャンパス・ゼミ」** で学習されることを勧める。