演習問題 32 の別解

曲面 $z=-(x^2+y^2)+3\ (z \geqq 0)$ の面積 S は，右図に示すように，yz 平面 $(x=0)$ 上の曲線 $z=-y^2+3$ ……㋐ $(0 \leqq z \leqq 3)$ を z 軸のまわりに回転してできる回転体の表面積として求めることもできる。

図 1

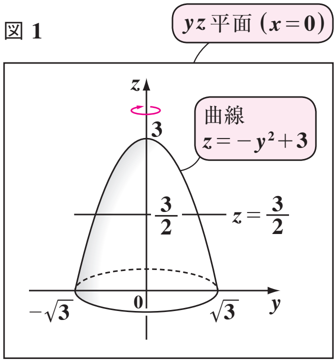
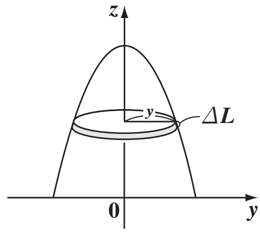


図 2 より，この場合の微小面積を ds とおくと，P148 の解法と同様に，

$$ds=2\pi y\cdot\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2}\,dz$$

図 2　微小面積 ds



微小面積 ΔS は，

$\Delta S=2\pi y\cdot\underbrace{\Delta L}_{\sqrt{(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}=\sqrt{\left(\frac{\Delta y}{\Delta z}\right)^2+1}\,\Delta z}$ より，

ここで，$\Delta z \to 0$ とすると，

$$ds=2\pi y\cdot\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2}\,dz$$

となる。

となるので，求める面積 S は，

$$S=2\pi\int_0^3 y\sqrt{1+\underbrace{\left(\frac{dy}{dz}\right)^2}_{y'^2}}\,dz$$

$$=2\pi\int_0^3\sqrt{\underbrace{y^2}_{3-z}+(\underbrace{y\cdot y'}_{-\frac{1}{2}\ (㋐より)})^2}\,dz \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots㋑$$

ここで，㋐より，$y^2=3-z$ ……………㋒

㋒の両辺を z で微分して，

$$2y\cdot\underbrace{\frac{dy}{dz}}_{y'}=-1 \qquad \therefore\ yy'=-\frac{1}{2} \quad\cdots\cdots㋓$$

よって，㋒，㋓を㋑に代入すると，

$$S=2\pi\int_0^3\sqrt{\underbrace{3-z+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}_{3+\frac{1}{4}-z=\frac{13}{4}-z}}\,dz$$

$$=2\pi\int_0^3\left(\frac{13}{4}-z\right)^{\frac{1}{2}}dz \quad となる。$$

ここで，$\left\{\left(\frac{13}{4}-z\right)^{\frac{3}{2}}\right\}'=\frac{3}{2}\left(\frac{13}{4}-z\right)^{\frac{1}{2}}\cdot(-1)=-\frac{3}{2}\left(\frac{13}{4}-z\right)^{\frac{1}{2}}$ より，
$\int\left(\frac{13}{4}-z\right)^{\frac{1}{2}}dz=-\frac{2}{3}\left(\frac{13}{4}-z\right)^{\frac{3}{2}}+C$　となるんだね。

$$\therefore\ S=2\pi\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\left[\left(\frac{13}{4}-z\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3$$

$$=-\frac{4}{3}\pi\left\{\underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}_{\boxed{\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}}}-\underbrace{\left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}_{\boxed{\frac{13\sqrt{13}}{2^3}=\frac{13\sqrt{13}}{8}}}\right\}=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{13\sqrt{13}}{8}-\frac{1}{8}\right)$$

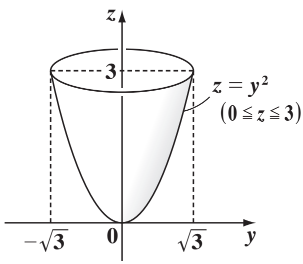
$=\frac{\pi}{6}(13\sqrt{13}-1)$　　となって，演習問題 32 と同じ結果を導くことができるんだね。大丈夫だった？

ここで，図形の対称性を利用して，曲線 $z=-y^2+3\ (0\leqq z\leqq 3,\ x=0)$ を直線 $z=\frac{3}{2}$ に関して対称移動すると，曲線 $z=y^2\ (0\leqq z\leqq 3,\ x=0)$ となる。よって，これを z 軸のまわりに回転してできる回転体の表面積 S を求める問題として解いても，もちろん構わない。この場合も同様に計算して，

$$S=2\pi\int_0^3 y\sqrt{1+y'^2}\,dz$$

$$=2\pi\int_0^3\sqrt{\underbrace{y^2}_{\boxed{z}}+\underbrace{(y\cdot y')^2}_{\boxed{\frac{1}{2}}}}\,dz$$

$z=y^2$
両辺を z で微分して，
$1=2y\cdot y'$
$\therefore\ yy'=\frac{1}{2}$



$$=2\pi\int_0^3\sqrt{z+\frac{1}{4}}\,dz$$

$$=2\pi\cdot\frac{2}{3}\left[\left(z+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3=\frac{4}{3}\pi\left\{\left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}$$

$=\frac{\pi}{6}(13\sqrt{13}-1)$　と求めることもできるんだね。

とてもシンプルに求められて，面白かったでしょう？