例題 6　偏角 θ の範囲を $0 \leqq \theta < 2\pi$ として，次の複素数を極形式で表そう。

(1) $z_1 = -3 + \sqrt{3}\,i$　　(2) $z_2 = -4 - 4i$　　(3) $z_3 = 2 - 2\sqrt{3}\,i$

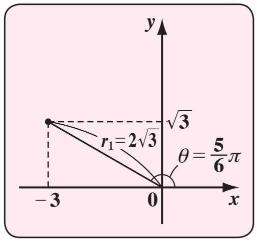
極形式 $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ は，絶対値 r と偏角 θ の値さえ求まればいいので，グラフのイメージから直感的に求めてもかまわない。

(1) $r_1 = |z_1| = \sqrt{(-3)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$　より，

$r_1 = 2\sqrt{3}$ をくくり出す。

$$z_1 = 2\sqrt{3}\left(\underbrace{-\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\cos\frac{5}{6}\pi} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\sin\frac{5}{6}\pi}i\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$$

となる。

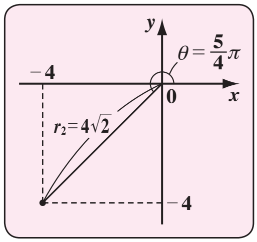


(2) $r_2 = |z_2| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$　より，

$r_2 = 4\sqrt{2}$ をくくり出す。

$$z_2 = 4\sqrt{2}\left(\underbrace{-\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\cos\frac{5}{4}\pi} \underbrace{-\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\sin\frac{5}{4}\pi}i\right) = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$$

となる。

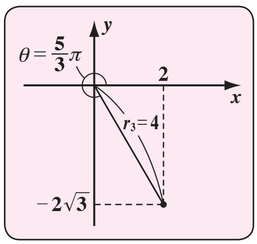


(3) $r_3 = |z_3| = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4$　より，

$r_3 = 4$ をくくり出す。

$$z_3 = 4\left(\underbrace{\frac{1}{2}}_{\cos\frac{5}{3}\pi} \underbrace{-\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\sin\frac{5}{3}\pi}i\right) = 4\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\right)$$

となる。



どう？グラフのイメージがあると，極形式も簡単に表せるだろう。

それでは次，2 つの極形式で表示された複素数 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ と $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ の積と商の公式を示す。

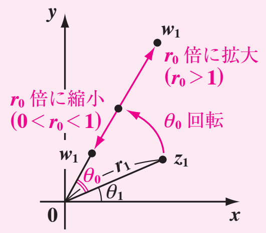
● 回転と相似の合成変換も押さえておこう！

最後に，“**回転と相似の合成変換**”についても，その基本を示しておこう。

回転と相似の合成変換(Ⅰ)

$\dfrac{w_1}{z_1} = r_0 e^{i\theta_0}$ ……① $(z_1 \neq 0)$ のとき，

点 w_1 は点 z_1 を原点のまわりに θ_0 だけ回転して r_0 倍に拡大(または縮小)したものである。 これを“**相似変換**”と呼ぶ。



$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ $(r_1 \neq 0)$ とおき，①の両辺に z_1 をかけると，

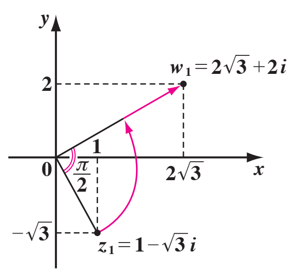
$$w_1 = z_1 \cdot r_0 e^{i\theta_0} = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_0 e^{i\theta_0} = \overset{|w_1|}{\overset{\parallel}{r_0 \cdot r_1}}\, e^{i\overset{\arg w_1}{\overset{\parallel}{(\theta_0 + \theta_1)}}}$$ となる。

(ⅱ) z_1 の絶対値 r_1 に r_0 をかける。　(ⅰ) z_1 の偏角 θ_1 に θ_0 を加える。

よって，(ⅰ) z_1 の偏角 θ_1 に θ_0 を加え，(ⅱ) z_1 の絶対値 r_1 を r_0 倍したものが点 w_1 になると言ってるわけだから，図のように複素数平面上では，点 z_1 を原点のまわりに反時計まわりに θ_0 だけ回転して，r_0 倍に相似変換(拡大または縮小)したものが点 w_1 になるんだね。納得いった？

たとえば，$\dfrac{w_1}{z_1} = 2\underset{\overset{\parallel}{0 + 1 \cdot i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}}}}{i}$，かつ $z_1 = 1 - \sqrt{3}\,i$ ならば，

$\dfrac{w_1}{z_1} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$ より，点 $z_1 = 1 - \sqrt{3}\,i$ を原点のまわりに $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転して，2 倍に拡大したものが点 w_1 なので，w_1 は右図のような位置の点になる。もちろん，正確な w_1 の値は，



$w_1 = 2i \cdot z_1 = 2i(1 - \sqrt{3}\,i) = 2i - 2\sqrt{3}\overset{(-1)}{\overset{\parallel}{i^2}} = 2\sqrt{3} + 2i$ と計算して求めればいいんだね。

例題 7　z は 0 以外の複素数で，$\dfrac{z+6}{z}$ が純虚数となるように変化する。
このとき，点 z の描く図形を求めよ。

$\dfrac{z+6}{z}$ $(z \neq 0)$ が純虚数より，

α が純虚数となる条件は，$\alpha+\overline{\alpha}=0$ かつ $\alpha \neq 0$ だね。

$\dfrac{z+6}{z}+\left(\overline{\dfrac{z+6}{z}}\right)=0$　かつ　$\dfrac{z+6}{z} \neq 0$

$\dfrac{\overline{z}+\overline{6}}{\overline{z}}=\dfrac{\overline{z}+6}{\overline{z}}$　　$z+6 \neq 0$　$\therefore z \neq -6$　　$\overline{6}=\overline{6+0\cdot i}=6-0\cdot i=6$

よって，$\dfrac{z+6}{z}+\dfrac{\overline{z}+6}{\overline{z}}=0$ ……①　$(z \neq -6)$

①の両辺に $z\overline{z}$ をかけて，

$$\overline{z}(z+6)+z(\overline{z}+6)=0 \qquad 2z\overline{z}+6z+6\overline{z}=0$$

両辺を 2 で割って，

$$z\overline{z}+3z+3\overline{z}=0$$

$$z(\overline{z}+3)+3(\overline{z}+3)=9$$

$$(z+3)(\overline{z}+3)=9$$

$$(z+3)(\overline{z+3})=9 \qquad |z+3|^2=9$$

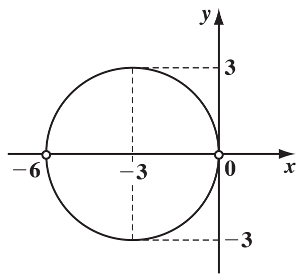
$\therefore |z+3|=3$　$(z \neq 0,\ -6)$

よって，点 z は，中心 -3，半径 3 の円を描く。

$-3+0\cdot i$

(ただし，2 点 0 と -6 は除く。)

大丈夫だった？



では次，直線の複素方程式の問題も解いてみよう。

> **例題 8**　複素数 z が $|z| = |z - 2 - 2\sqrt{3}i|$ をみたしながら変化する。
> このとき，点 z の描く図形を求めてみよう。

$-2-2\sqrt{3}i = \alpha$ とおくと，与式は $|z| = |z+\alpha|$ となる。

この両辺を 2 乗して，

$$\underbrace{|z|^2}_{z\overline{z}} = \underbrace{|z+\alpha|^2}_{(z+\alpha)(\overline{z}+\overline{\alpha})} \qquad z\overline{z} = (z+\alpha)(\overline{z}+\overline{\alpha})$$

$$\cancel{z\overline{z}} = \cancel{z\overline{z}} + \overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} + \alpha\overline{\alpha}$$

$$\underbrace{\overline{\alpha}}_{-2+2\sqrt{3}i}z + \underbrace{\alpha}_{-2-2\sqrt{3}i}\overline{z} + \underbrace{\alpha\overline{\alpha}}_{|\alpha|^2=(-2)^2+(-2\sqrt{3})^2=16} = 0$$

直線の複素方程式だ！

ここで，$\overline{\alpha} = -2+2\sqrt{3}i$，$\alpha = -2-2\sqrt{3}i$ を代入して，

$-2(1-\sqrt{3}i)z - 2(1+\sqrt{3}i)\overline{z} + 16 = 0$　　両辺を -2 で割ると，

$(1-\sqrt{3}i)\underbrace{z}_{x+yi} + (1+\sqrt{3}i)\underbrace{\overline{z}}_{x-yi} - 8 = 0$ となって，直線の式が導けた。

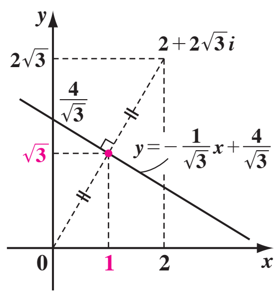
直線の方程式の場合，$z = x+yi$，$\overline{z} = x-yi$ （x，y：実変数）とおいて，x と y の方程式にもち込んだ方が分かりやすいんだね。よって，

$$(1-\sqrt{3}i)(x+yi) + (1+\sqrt{3}i)(x-yi) - 8 = 0$$

$$x + \cancel{yi} - \cancel{\sqrt{3}xi} - \sqrt{3}y\underbrace{i^2}_{(-1)} + x - \cancel{yi} + \cancel{\sqrt{3}xi} - \sqrt{3}y\underbrace{i^2}_{(-1)} - 8 = 0$$

$$2x + 2\sqrt{3}y - 8 = 0 \qquad x + \sqrt{3}y - 4 = 0$$

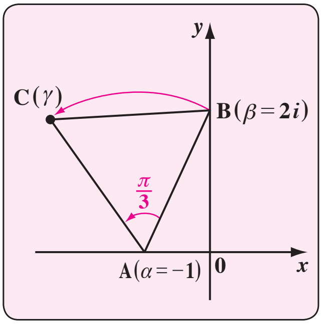
$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{4}{\sqrt{3}}$$ となって，答えだ！



> これは，与式を $\underbrace{|z-0|}_{\text{原点 }0\text{ と点 }z\text{ との距離}} = \underbrace{|z-(2+2\sqrt{3}i)|}_{\text{点 }2+2\sqrt{3}i\text{ と点 }z\text{ との距離}}$ とおくと，z は，原点 0 と
> 点 $2+2\sqrt{3}i$ からの距離が等しい点の集合であることが分かるだろう。
> よって，点 z は，原点 0 と点 $2+2\sqrt{3}i$ を結ぶ線分の垂直二等分線になる。
> これから，$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1) + \sqrt{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{4}{\sqrt{3}}$ を図形的に導いてもいい。

例題 9 複素数平面上で，複素数 $\alpha=-1$，$\beta=2i$，γ，δ の表す点を順に A, B, C, D とする。△ABC は正三角形，△ABD は∠B が直角の直角二等辺三角形であり，点 C，点 D は共に第 2 象限にあるものとする。このとき，複素数 γ と δ を求めてみよう。

右図に示すように，点 γ は点 $\beta=2i$ を点 $\alpha=-1$ のまわりに $\frac{\pi}{3}$ だけ回転したものなので，



$$\frac{\gamma-(-1)}{2i-(-1)}=1\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

回転のみなので，$r=1$ だね。

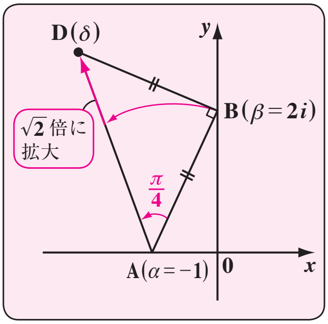
よって，

$$\gamma=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(2i+1)-1$$

$$\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)(1+2i)=\frac{1}{2}(1+2i+\sqrt{3}i+2\sqrt{3}\underbrace{i^2}_{(-1)})$$

$$=\frac{1}{2}\left\{1-2\sqrt{3}+(2+\sqrt{3})i\right\}-1 \qquad \therefore \gamma=-\frac{1+2\sqrt{3}}{2}+\frac{2+\sqrt{3}}{2}i \quad \text{となる。}$$

次に，右図に示すように，点 δ は，点 $\beta=2i$ を点 $\alpha=-1$ のまわりに $\frac{\pi}{4}$ だけ回転して $\sqrt{2}$ 倍に拡大したものなので，



$$\frac{\delta-(-1)}{2i-(-1)}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\delta=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)(2i+1)-1$$

$$(1+i)(1+2i)=1+2i+i+2\underbrace{i^2}_{(-1)}$$

$\therefore \delta=-1+3i-1=-2+3i$ となるんだね。納得いった？

例題 10　$S_n=(2n-1)^2+(2n-2)^2+(2n-3)^2+\cdots+n^2$ を求めよう。

$S_n=(2n-1)^2+(2n-2)^2+(2n-3)^2+\cdots+(2n-n)^2$　と変形して，

1，2，3，…，n と動く部分を k とおくと，Σ 計算にもち込める。

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(2n-k)^2=\sum_{k=1}^{n}(\underbrace{4n^2}_{\text{定数扱い}}-\underbrace{4n}_{\text{定数扱い}}k+k^2)$$

定数扱い ← 1，2，3，…，n と動くのは k だからね。

定数 c とみる。

$$=\underbrace{\sum_{k=1}^{n}4n^2}_{=\,n\cdot 4n^2}-4n\underbrace{\sum_{k=1}^{n}k}_{=\,\frac{1}{2}n(n+1)}+\underbrace{\sum_{k=1}^{n}k^2}_{=\,\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$$

公式
$\sum_{k=1}^{n}c=nc$，$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$，
$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$$=4n^3-2n^2(n+1)+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n\{\underbrace{24n^2-12n(n+1)+(n+1)(2n+1)}_{=\,24n^2-12n^2-12n+2n^2+3n+1=14n^2-9n+1}\}$$

$\therefore\ S_n=\frac{1}{6}n(14n^2-9n+1)$　となる。

公式は使うことによって，本当にマスターできるんだね。

● $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形の意味を押さえよう！

では次，極限の解説に入ろう。極限の式 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n^2}$ の場合，これは分母が $2n^2\to\infty$ となって，$\frac{1}{\infty}$ の形だから，当然 0 に近づいていくのが分かるだろう。つまり，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n^2}=0$ だ。

同様に，$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{3n^2+1}$ も $\lim_{n\to\infty}\frac{-2}{n^3-1}$ も，それぞれ $\frac{3}{\infty}$，$\frac{-2}{\infty}$ の形だから，0 に**収束**するのも大丈夫だね。

例題 21　$y = \dfrac{2x}{x-1}$ のグラフを描いてみよう。

与関数を変形すると,

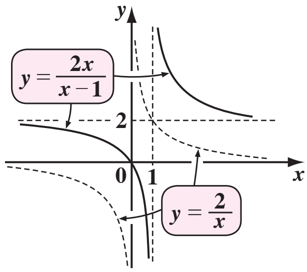
$$y = \frac{2x}{x-1} = \frac{2(x-1)+2}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1}$$

$\therefore\ y = \dfrac{2}{x-1} + 2$ は, $y = \dfrac{2}{x}$ を $(1,\ 2)$

だけ平行移動したものだ。

すなわち,

$$y = \frac{2}{x} \xrightarrow[\text{平行移動}]{(1,\ 2)\text{だけ}} y-2 = \frac{2}{x-1}$$



よって, $y = \dfrac{2x}{x-1}$ のグラフは右上図のようになる。

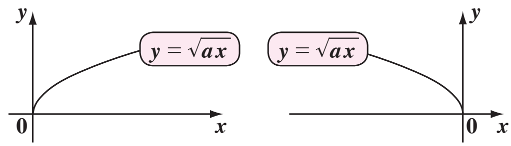
では次, 無理関数:

$y = \sqrt{ax}$　(a: 定数)

のグラフは a の値の正・負によって, 図3(ⅰ)(ⅱ) に示すように, 2通りのグラフに分類される。

図3　無理関数 $y = \sqrt{ax}$ のグラフ

(ⅰ) $a > 0$ のとき　　　(ⅱ) $a < 0$ のとき



だから, たとえば関数 $y = \sqrt{2x+2} + 2$ のグラフを求めたかったら,

$y = \sqrt{2(x+1)} + 2$ と変形すると,

$y = \sqrt{2x}$ を $(-1,\ 2)$ だけ平行移動

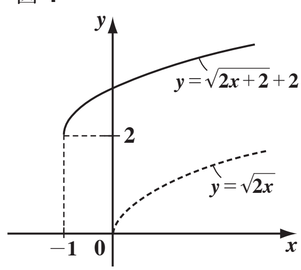
したものであることが分かるね。

つまり,

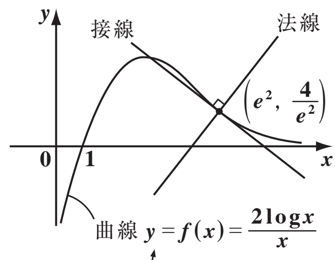
$$y = \sqrt{2x} \xrightarrow[\text{平行移動}]{(-1,\ 2)\text{だけ}} y-2 = \sqrt{2(x+1)}$$

よって, $y = \sqrt{2x+2} + 2$ のグラフは, 図4のようになるんだね。

図4



$y=f(x)=\dfrac{2\log x}{x}$ を x で微分して，



$$f'(x)=2\cdot\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\log x\cdot 1}{x^2}=\frac{2(1-\log x)}{x^2}$$

公式：$\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$

となる。よって，

接線の傾き

$$f'(e^2)=\frac{2(1-\overset{2}{\log e^2})}{e^4}=-\frac{2}{e^4}\quad \text{より，}$$

このグラフの描き方については，後で詳しく説明する。

(ⅰ) $y=f(x)$ 上の点 $(e^2,\ f(e^2))$ における接線の方程式は，

$$y=-\frac{2}{e^4}(x-e^2)+\frac{4}{e^2}$$

$y=f'(e^2)(x-e^2)+f(e^2)$

$$\therefore\ y=-\frac{2}{e^4}x+\frac{6}{e^2}\quad \text{となる。}$$

(ⅱ) $y=f(x)$ 上の点 $(e^2,\ f(e^2))$ における法線の方程式は，その傾きが

$$-\frac{1}{f'(e^2)}=\frac{e^4}{2}\quad \text{より，}$$

$y=-\dfrac{1}{f'(e^2)}(x-e^2)+f(e^2)$

$$y=\frac{e^4}{2}(x-e^2)+\frac{4}{e^2}=\frac{e^4}{2}x-\frac{e^6}{2}+\frac{4}{e^2}$$

$$\therefore\ y=\frac{e^4}{2}x-\frac{e^8-8}{2e^2}\quad \text{となる。大丈夫？}$$

● ロピタルの定理を紹介しよう！

証明はかなり大変なんだけれど，$\dfrac{0}{0}$ や $\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形の関数の極限を求めるのに非常に役に立つ“**ロピタルの定理**”を紹介しよう。利用する分には便利で簡単な定理だから，是非マスターしよう。

“ロピタルの定理”の証明は，大学の微分積分の重要テーマの1つだ。これに興味のある方は**「微分積分キャンパス・ゼミ」**(**マセマ**)で学習されることを勧める。

(Ⅱ) **2 つの関数の和の形の関数の例**

例として，$y = g(x) = 2\sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$ のグラフの概形を描いてみよう。

これは，$y = 2\sqrt{x}$ と $y = \dfrac{1}{x}$ の 2 つの関数の y 座標同士をたしたものが，

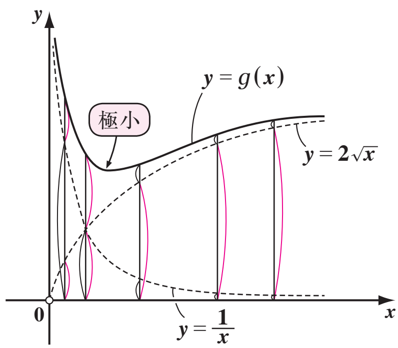
新たな $y = g(x)$ の y 座標となる。

図 6 に示すように，

$y = 2\sqrt{x}$ と $y = \dfrac{1}{x}$ のグラフから，

簡単に $y = g(x) = 2\sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$ のグラフの概形がつかめ，そして，1 つの極小値をもつことも分かるんだね。

図 6　$y = g(x)$ のグラフ



それでは今度は微分計算もキチンと行って，このグラフを求めてみよう。

まず，$y = g(x) = 2x^{\frac{1}{2}} + x^{-1}$ $(x > 0)$ を x で順に 2 回微分して，

$$\cdot\ g'(x) = 2\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 1\cdot x^{-2} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$$

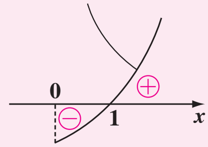
$$= \frac{x\sqrt{x} - 1}{x^2} \quad \widetilde{g'(x)} = \begin{cases} \oplus \\ 0 \\ \ominus \end{cases} \quad x^2 : \oplus$$

$g'(x) = 0$ のとき，$x\sqrt{x} - 1 = 0$ より，

$x^{\frac{3}{2}} = 1$　　$\therefore\ x = 1^{\frac{2}{3}} = 1$

$g'(x)$ の符号に関する本質的な部分を $\widetilde{g'(x)}$ とおくと，

$\widetilde{g'(x)} = x\sqrt{x} - 1$



よって，$g'(x)$ は，$x = 1$ を境に ⊖ から ⊕ に転ずることが分かる。

$$\cdot\ g''(x) = \left(x^{-\frac{1}{2}} - x^{-2}\right)' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} + 2x^{-3} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{2}{x^3}$$

$$= \frac{-x\sqrt{x} + 4}{2x^3} \quad \widetilde{g''(x)} = \begin{cases} \oplus \\ 0 \\ \ominus \end{cases} \quad 2x^3 : \oplus$$

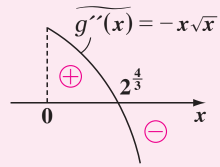
よって，$g''(x)=0$ のとき，

$-x\sqrt{x}+4=0 \qquad x^{\frac{3}{2}}=4$

$\therefore\ x=4^{\frac{2}{3}}=(2^2)^{\frac{2}{3}}$

$=2^{\frac{4}{3}}\left(=\sqrt[3]{2^4}=\underbrace{\sqrt[3]{16}}_{2.5\cdots}\right)$

$\widetilde{g''(x)}$ の符号に関する本質的な部分を $\widetilde{g''(x)}$ とおくと，



よって，$g''(x)$ は，$x=2^{\frac{4}{3}}$ を境に⊕から⊖に転ずる。

・$x=1$ のとき，極小値 $g(1)=2\sqrt{1}+\dfrac{1}{1}=3$

・$x=2^{\frac{4}{3}}$ のとき，

$$g\left(2^{\frac{4}{3}}\right)=2\cdot\sqrt{2^{\frac{4}{3}}}+\frac{1}{2^{\frac{4}{3}}}=\frac{\underbrace{2\cdot 2^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{4}{3}}}_{2^{1+\frac{2}{3}+\frac{4}{3}}=2^3=8}+1}{2^{\frac{4}{3}}}=9\cdot 2^{-\frac{4}{3}}$$

$\therefore$ 変曲点 $\left(2^{\frac{4}{3}},\ 9\cdot 2^{-\frac{4}{3}}\right)$

よって，$y=g(x)$ の増減・凹凸表は右のようになる。

$g(x)$ の増減・凹凸表

x	0		1		$2^{\frac{4}{3}}$	
$g'(x)$	/	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$g''(x)$	/	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$g(x)$	/	↘	3	↗	$9\cdot 2^{-\frac{4}{3}}$	↗

次に，関数 $g(x)$ の $x\to+0$，$x\to+\infty$ の極限を求めると，

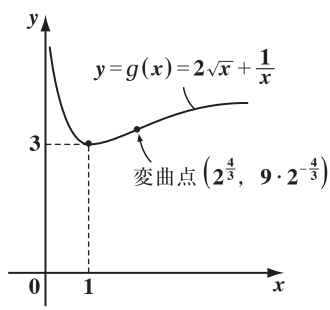
・$\displaystyle\lim_{x\to+0} g(x)=\lim_{x\to+0}\Big(\underbrace{2\sqrt{x}}_{0}+\underbrace{\frac{1}{x}}_{+\infty}\Big)$

$=\infty$

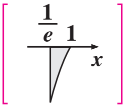
・$\displaystyle\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}\Big(\underbrace{2\sqrt{x}}_{\infty}+\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}\Big)$

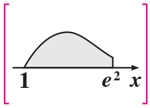
$=\infty$

以上より，$y=g(x)$ のグラフを描くと右図のようになる。



面積 $S = S_1 + S_2 = \underline{-\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,dx} + \underline{\int_{1}^{e^2} f(x)\,dx}$





$$= -\int_{\frac{1}{e}}^{1} 2\cdot\underbrace{\log x}_{g}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{g'}\,dx + \int_{1}^{e^2} 2\cdot\underbrace{\log x}_{g}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{g'}\,dx$$

$g = \log x$ とおいて，積分公式：$\int g\cdot g'\,dx = \frac{1}{2}g^2$ を使った。

$$= -\left[(\log x)^2\right]_{\frac{1}{e}}^{1} + \left[(\log x)^2\right]_{1}^{e^2}$$

$$= -\underbrace{\cancel{(\log 1)^2}}_{0} + \underbrace{\left(\log\frac{1}{e}\right)^2}_{(\log e^{-1})^2 = (-\underbrace{\log e}_{1})^2 = (-1)^2} + \underbrace{(\log e^2)^2}_{2^2} - \underbrace{\cancel{(\log 1)^2}}_{0}$$

$= 1 + 4 = 5$　となって，答えだ！ 納得いった？

例題 46　$0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲で，2 つの曲線 $y = \sin x$ と $y = \sin 2x$ とで囲まれる部分の面積 S を求めよう。

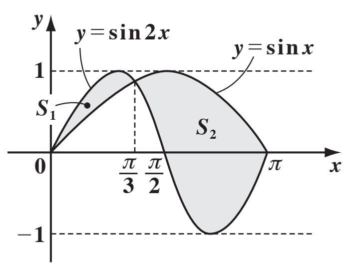
$y = \sin x$ ……① と $y = \sin 2x$ ……②

$(0 \leqq x \leqq \pi)$ の交点を求めよう。

①，②から y を消して，

$\sin x = \underbrace{\sin 2x}_{2\sin x\cos x}$　　$\sin x = 2\sin x\cos x$

$\sin x(2\cos x - 1) = 0$



$\therefore \sin x = 0$ または $\cos x = \frac{1}{2}$ より，これをみたす定義域内の x の値は $x = 0,\ \frac{\pi}{3},\ \pi$ だね。よって，①と②で囲まれる図形の面積 S は，上図の S_1 と S_2 の和になるので，

$$S = S_1 + S_2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\underbrace{\sin 2x}_{上側} - \underbrace{\sin x}_{下側})\,dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\underbrace{\sin x}_{上側} - \underbrace{\sin 2x}_{下側})\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\cos 2x + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left[-\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$

よって，

$$S=-\frac{1}{2}\underbrace{\cos\frac{2}{3}\pi}_{\left(-\frac{1}{2}\right)}+\underbrace{\cos\frac{\pi}{3}}_{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\underbrace{\cos 0}_{1}-\underbrace{\cos 0}_{1}-\underbrace{\cos\pi}_{(-1)}+\frac{1}{2}\underbrace{\cos 2\pi}_{1}+\underbrace{\cos\frac{\pi}{3}}_{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\underbrace{\cos\frac{2}{3}\pi}_{\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

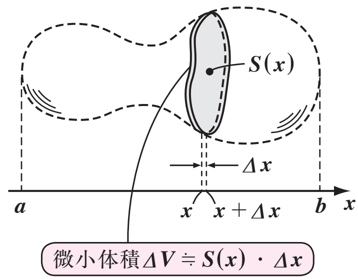
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cancel{-1}\cancel{+1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{5}{2}$$ となるんだね。大丈夫？

これで，面積計算の要領もつかめたと思う。では次，体積計算に入ろう。

● 薄切りハムモデルで体積計算しよう！

では，体積計算にチャレンジしよう。図 **4** に示すように，ある立体が与えられたとき，x 軸を設定して，この立体が $a \leqq x \leqq b$ の範囲にあるものとする。この立体の体積を V とおいて，この V の求め方を考えてみよう。

図 **4**　体積計算
(薄切りハムモデル)



面積計算のときと同様に，微小体積 ΔV をまず求めよう。図 **4** に示すように，x 軸に垂直な平面で切った立体の切り口の断面積を $S(x)$ とおくと，これに微小な厚さ Δx をかけたものが，ΔV に近似的に等しいことが分かると思う。よって，

$\Delta V \fallingdotseq S(x)\cdot\Delta x$ より，$\dfrac{\Delta V}{\Delta x} \fallingdotseq S(x)$ となる。

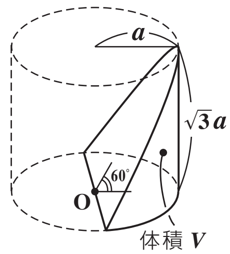
立体を薄くスライスしたもので ΔV を近似したので，これを“薄切りハムモデル”と呼ぼう

ここで，$\Delta x \to 0$ の極限をとると，

$$\frac{dV}{dx}=S(x)$$

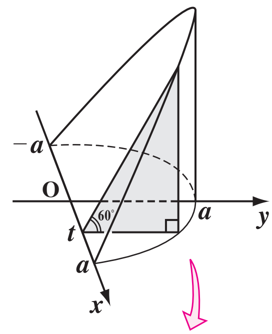
となるので，面積計算のときと同様に，この両辺を積分区間 $[a,\ b]$ で積分すると，体積：$V=\displaystyle\int_a^b S(x)\,dx$ ……$(*2)$ の公式が導ける。

例題 47　右図に示すように半径 a，高さ $\sqrt{3}a$ の直円柱がある。この底面 (円) の中心 O を通り，底面から仰角 $60°$ の平面でこの直円柱を切ってできる 2 つの立体の内，小さい方の立体の体積 V を求めてみよう。



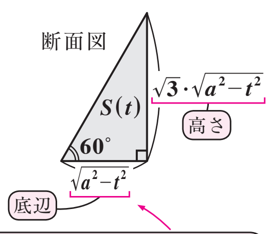
右図に示すように，x 軸と y 軸を定め，この立体を $x=t$ $(-a \leqq t \leqq a)$ の平面で切った切り口の断面積 $S(t)$ を求めよう。

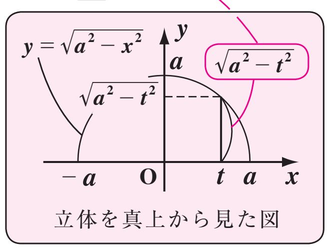
今回は，t での積分にする。



この立体を真上から見た図から，この切り口は底辺が $\sqrt{a^2-t^2}$ で，高さが $\sqrt{3}\cdot\sqrt{a^2-t^2}$ の直角三角形だね。よって，この断面積 $S(t)$ は，

$$S(t)=\frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{a^2-t^2}}_{\text{底辺}}\cdot\underbrace{\sqrt{3}\cdot\sqrt{a^2-t^2}}_{\text{高さ}}=\frac{\sqrt{3}}{2}(a^2-t^2)$$
$$(-a \leqq t \leqq a)$$





となる。よって，求める立体の体積 V は，

$$V=\int_{-a}^{a}S(t)\,dt$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-a}^{a}\underbrace{(a^2-t^2)}_{\text{偶}}\,dt$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\int_{0}^{a}(\underbrace{a^2}_{\text{定数}}-t^2)\,dt$$

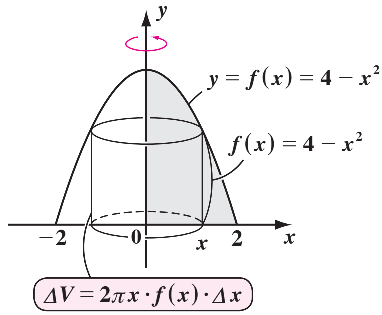
$$=\sqrt{3}\left[a^2t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^a=\sqrt{3}\left(a^3-\frac{1}{3}a^3\right)$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$$ となって，答えだね。大丈夫だった？

では，例題 **48**(ⅱ)の問題をバウムクーヘン

$y = f(x) = 4 - x^2$ と x 軸とで囲まれた部分の y 軸のまわりの回転体の体積 $V_y = 8\pi$ (P134)

型積分で解いてみよう。この場合，回転する領域は右図に示すように，$y = f(x)$ と x 軸と y 軸とで囲まれた部分でいいね。つまり，積分区間は $0 \leqq x \leqq 2$ でいい。



以上より，求める立体の体積 V は，バウムクーヘン型積分により，

$$V = 2\pi\int_0^2 x\underbrace{f(x)}_{(4-x^2)}\,dx = 2\pi\int_0^2 (4x - x^3)\,dx = 2\pi\left[2x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^2$$

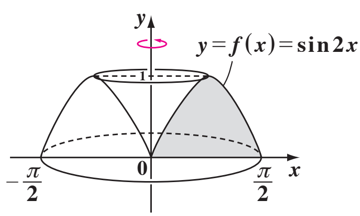
$= 2\pi(8-4) = 8\pi$　となって，例題と同じ結果 (P134) が導けた！

もちろん，これはバウムクーヘン型積分をもち出すまでもない問題だったんだけれど，これで少しバウムクーヘン型積分にも慣れたと思う。

それでは，次の例題でさらに練習しよう。

例題 49　$y = f(x) = \sin 2x \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸とで囲まれる部分を，y 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V_y を求めよう。

$y = f(x) = \sin 2x \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸とで囲まれた図形を，y 軸のまわりに **1** 回転してできる回転体のイメージを右図に示す。



この場合のバウムクーヘン型積分における微小体積を ΔV とおくと，

$\Delta V = 2\pi x \cdot f(x) \cdot \Delta x$

$= 2\pi x \cdot \sin 2x \cdot \Delta x$ となる。

よって，求める回転体の体積 V_y をバウムクーヘン型積分により求めると，

$$V_y = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(x)\,dx = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\,dx$$

$$= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)'dx$$

部分積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\cdot g'dx = [f\cdot g]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'\cdot g\,dx$$

$$= 2\pi\left\{-\frac{1}{2}[x\cos 2x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx\right\}$$

簡単化

$$= 2\pi\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\underbrace{\cos\pi}_{(-1)} - \cancel{0\cos 0}\right) + \underbrace{\cancel{\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\,dx}}_{}\right\}$$

$$\frac{1}{2}[\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}(\underbrace{\sin\pi}_{0} - \underbrace{\sin 0}_{0}) = 0$$

$$= 2\pi\times\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 2\pi\times\frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{2}$$ となって，答えだ！ 納得いった？

これで，本当にバウムクーヘン型積分の要領も覚えたと思う。確かにオイシイ公式だからシッカリ頭に入れて，使いこなせるようになってくれ。

ここで，点 $\mathbf{P}(x,\ y)$ の表し方は，一意(いちい)に(1通りに)決まるんだけど，極座標での点は複数の表し方があるんだ。たとえば図 2 に示す

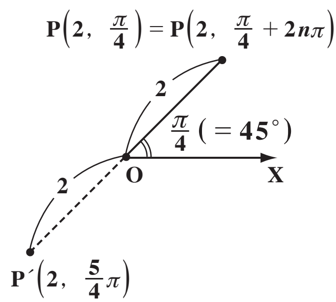
複素数の極形式と同じだね。

点 $\mathbf{P}\left(\underbrace{2}_{r},\ \underbrace{\frac{\pi}{4}}_{\theta}\right)$ は，$\theta = \frac{\pi}{4} \overbrace{\pm 2\pi}^{1\text{回転}},\ \frac{\pi}{4} \overbrace{\pm 4\pi}^{2\text{回転}},\ \cdots$

一般角 $\theta = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$ （n：整数）

としても，すべて同じ位置の点を表す。また，

図 2　極座標による点の表現



負の r も許して，図 2 の点 $\mathbf{P}'\left(2,\ \frac{5}{4}\pi\right)$ の $r = 2$ を -2 にして反転させた点 $\left(-2,\ \frac{5}{4}\pi\right)$ もまた，点 $\mathbf{P}\left(2,\ \frac{\pi}{4}\right)$ と同じ点を表すことになるんだね。

でも，ここで，$0 < r$，$0 \leqq \theta < 2\pi$ などと範囲を指定すると，原点 O 以外の極座標の点 $\mathbf{P}(r,\ \theta)$ は一意に決定することができるんだね。大丈夫？

それでは，点の xy 座標と極座標の変換の練習をしておこう。

条件：$0 < r$ かつ $0 \leqq \theta < 2\pi$ の下で，図 3 に示す 3 点 P，Q，R の極座標と xy 座標による座標を下に示そう。

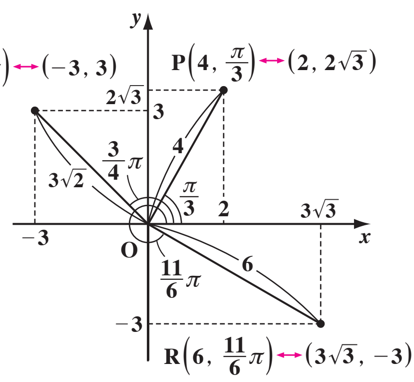
極座標　　　xy 座標

$\mathbf{P}\left(\underbrace{4}_{r},\ \underbrace{\frac{\pi}{3}}_{\theta}\right) \longleftrightarrow \mathbf{P}\left(\underbrace{2}_{4\cos\frac{\pi}{3}},\ \underbrace{2\sqrt{3}}_{4\sin\frac{\pi}{3}}\right)$

$\mathbf{Q}\left(\underbrace{3\sqrt{2}}_{r},\ \underbrace{\frac{3}{4}\pi}_{\theta}\right) \longleftrightarrow \mathbf{Q}\left(\underbrace{-3}_{3\sqrt{2}\cos\frac{3}{4}\pi},\ \underbrace{3}_{3\sqrt{2}\sin\frac{3}{4}\pi}\right)$

$\mathbf{R}\left(\underbrace{6}_{r},\ \underbrace{\frac{11}{6}\pi}_{\theta}\right) \longleftrightarrow \mathbf{R}\left(\underbrace{3\sqrt{3}}_{6\cos\frac{11}{6}\pi},\ \underbrace{-3}_{6\sin\frac{11}{6}\pi}\right)$

図 3　極座標と xy 座標



さらに，$m=n$ のとき，**m 次の正方行列**ともいう。よって，(ⅰ) は **2** 次の正方行列なんだね。この，**2** 次の正方行列が最も基本的な行列なので，これを中心にこれから解説しよう。

● 行列同士の和・差・積をマスターしよう！

一般に，行列は $A, B, X, \cdots\cdots$ など，大文字のアルファベットで表すよ。そして，行列が等しい，すなわち $A=B$ といった場合，行列の型が同じで，かつ行列の対応するすべての成分がそれぞれ同じでないといけない。
これって，成分表示されたベクトルと一緒だね。同様に，行列を**実数(スカラー)倍**したり，行列同士の**和・差**の計算も，ベクトルの成分表示のときにやったものと同様に行えるんだよ。このことを，例題で示そう。

$A=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$， $B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ について， ← A, B は共に **2** 次の正方行列だ。

(1) $2A=2\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2\times3 & 2\times(-2) \\ 2\times1 & 2\times1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

各成分に **2** をかける。

(2) $A+B=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3+1 & -2+3 \\ 1+4 & 1-1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

対応する成分同士のたし算

(3) $A-B=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3-1 & -2-3 \\ 1-4 & 1+1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

対応する成分同士の引き算

(4) $4A-3B=4\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}-3\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} 12 & -8 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 12 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 12-3 & -8-9 \\ 4-12 & 4+3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 & -17 \\ -8 & 7 \end{bmatrix}$

となる。
成分表示されたベクトルの計算とまったく同じだから，違和感はなかったと思う。

それでは次，**2** つの行列の積(かけ算)について解説しよう。

2 つの 2 次の正方行列 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ と $B=\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ の積 AB は次のように行う。

$$AB=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \overset{(1,\,1)\text{ 成分}}{ap+br} & \overset{(1,\,2)\text{ 成分}}{aq+bs} \\ \underset{(2,\,1)\text{ 成分}}{cp+dr} & \underset{(2,\,2)\text{ 成分}}{cq+ds} \end{bmatrix}$$

それぞれ 4 つの成分の計算の仕方をていねいに書くと，次の通りだ。

(i) (1, 1) 成分について，

$$\text{1 行}\rightarrow\begin{bmatrix} a & b \\ \ast & \ast \end{bmatrix}\overset{\text{1 列}\downarrow}{\begin{bmatrix} p & \ast \\ r & \ast \end{bmatrix}}=\overset{(1,\,1)\text{ 成分}}{\begin{bmatrix} ap+br & \ast \\ \ast & \ast \end{bmatrix}}$$

(ii) (1, 2) 成分について，

$$\text{1 行}\rightarrow\begin{bmatrix} a & b \\ \ast & \ast \end{bmatrix}\overset{\text{2 列}\downarrow}{\begin{bmatrix} \ast & q \\ \ast & s \end{bmatrix}}=\overset{(1,\,2)\text{ 成分}}{\begin{bmatrix} \ast & aq+bs \\ \ast & \ast \end{bmatrix}}$$

(iii) (2, 1) 成分について，

$$\text{2 行}\rightarrow\begin{bmatrix} \ast & \ast \\ c & d \end{bmatrix}\overset{\text{1 列}\downarrow}{\begin{bmatrix} p & \ast \\ r & \ast \end{bmatrix}}=\underset{(2,\,1)\text{ 成分}}{\begin{bmatrix} \ast & \ast \\ cp+dr & \ast \end{bmatrix}}$$

(iv) (2, 2) 成分について，

$$\text{2 行}\rightarrow\begin{bmatrix} \ast & \ast \\ c & d \end{bmatrix}\overset{\text{2 列}\downarrow}{\begin{bmatrix} \ast & q \\ \ast & s \end{bmatrix}}=\underset{(2,\,2)\text{ 成分}}{\begin{bmatrix} \ast & \ast \\ \ast & cq+ds \end{bmatrix}}$$

どう？　要領は分かった？　早速練習してみよう。

$A=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ について，

$$(5)\ AB=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3\times1+(-2)\times4 & 3\times3+(-2)\times(-1) \\ 1\times1+1\times4 & 1\times3+1\times(-1) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -5 & 11 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(6)\ BA=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1\times3+3\times1 & 1\times(-2)+3\times1 \\ 4\times3+(-1)\times1 & 4\times(-2)+(-1)\times1 \end{bmatrix}$$

$=\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 11 & -9 \end{bmatrix}$ となるんだね。

面白い結果が出てきたね。一般に行列の積において交換法則は成り立たない。つまり $AB\fallingdotseq BA$ なんだね。これが上の例でも確認されたというわけなんだ。納得いった？

よって，行列では，整式のときに使った乗法公式は成り立たないので，

(1) $(A+B)^2 \fallingdotseq A^2+2AB+B^2$

(2) $(A+B)(A-B) \fallingdotseq A^2-B^2$ である。 ← これは要注意だ！

それぞれを，キチンと示せば，次の通りだ。

(1) $(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+\underset{\sim\sim}{BA}+B^2$

(2) $(A+B)(A-B)=A^2-AB+\underset{\sim\sim}{BA}-B^2$

これは，AB と等しいとは限らないので，このままで終了！

それでは，行列の積の計算練習をしておこう。

例題 59　次の行列 X と Y について，積 XY と YX を求めよう。

(1) $X=\begin{bmatrix}1&2\\3&-1\\-2&1\end{bmatrix}$, $Y=\begin{bmatrix}2&1&4\\1&3&-1\end{bmatrix}$　(2) $X=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$, $Y=[3\ \ -2]$

(3) $X=\begin{bmatrix}4&2\\2&-1\end{bmatrix}$, $Y=\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$

---

(1) $XY=\begin{bmatrix}1&2\\3&-1\\-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&4\\1&3&-1\end{bmatrix}$

$3\times\underline{\underline{2}}$ 行列と $\underline{\underline{2}}\times3$ 行列の積は 3×3 行列になる。

$$=\begin{bmatrix}1\times2+2\times1 & 1\times1+2\times3 & 1\times4+2\times(-1)\\ 3\times2+(-1)\times1 & 3\times1+(-1)\times3 & 3\times4+(-1)\times(-1)\\ -2\times2+1\times1 & -2\times1+1\times3 & -2\times4+1\times(-1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4&7&2\\5&0&13\\-3&1&-9\end{bmatrix}$$

$YX=\begin{bmatrix}2&1&4\\1&3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&-1\\-2&1\end{bmatrix}$

$2\times\underline{\underline{3}}$ 行列と $\underline{\underline{3}}\times2$ 行列の積は 2×2 行列になる。

$$=\begin{bmatrix}2\times1+1\times3+4\times(-2) & 2\times2+1\times(-1)+4\times1\\ 1\times1+3\times3+(-1)\times(-2) & 1\times2+3\times(-1)+(-1)\times1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-3&7\\12&-2\end{bmatrix}$$

XY と YX では行列の型まで異なるんだね。当然，$XY \fallingdotseq YX$ だ。

1 回サイコロを投げて 3 以上の目が出る確率を p とおくと，$p = \dfrac{\overset{3,\,4,\,5,\,6\text{の目}}{4}}{6} = \dfrac{2}{3}$ で，
そうでない確率 q は，$q = 1 - p = \dfrac{1}{3}$ となる。
よって，4 回中 x 回だけ 3 以上の目が出る確率 P_x $(x = 0,\ 1,\ \cdots,\ 4)$ は，

$$P_x = {}_4C_x\, p^x q^{4-x} = {}_4C_x \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{4-x} = \frac{{}_4C_x \cdot 2^x}{3^4} = \frac{{}_4C_x \cdot 2^x}{81}$$ となる。

よって，$P_0 = \dfrac{\overset{1}{{}_4C_0} \cdot 2^0}{81} = \dfrac{1}{81}$，$P_1 = \dfrac{\overset{4}{{}_4C_1} \cdot 2^1}{81} = \dfrac{4 \cdot 2}{81} = \dfrac{8}{81}$，

$$\frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1} = 6 \qquad {}_4C_1 = 4 \qquad {}_4C_0 = 1$$

$$P_2 = \frac{{}_4C_2 \cdot 2^2}{81} = \frac{24}{81},\quad P_3 = \frac{{}_4C_3 \cdot 2^3}{81} = \frac{32}{81},\quad P_4 = \frac{{}_4C_4 \cdot 2^4}{81} = \frac{16}{81}$$

以上より，確率変数 $X = x$ $(x = 0,\ 1,\ \cdots,\ 4)$ の確率分布表は次のようになる。

確率分布表

確率変数 X	0	1	2	3	4
確率 P	$\frac{1}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{16}{81}$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{4} P_k = 1$ (全確率) となっている。

これから X の期待値 $E[X]$ と分散 $V[X]$ を求めると，

$$E[X] = \cancel{0 \cdot \frac{1}{81}} + 1 \cdot \frac{8}{81} + 2 \cdot \frac{24}{81} + 3 \cdot \frac{32}{81} + 4 \cdot \frac{16}{81} \qquad E[X] = \sum_{k=0}^{4} x_k P_k$$

$$= \frac{1}{81}(8 + 48 + 96 + 64) = \frac{216}{81} = \frac{8}{3}$$ となり，

$$V[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

$$= \cancel{0^2 \cdot \frac{1}{81}} + 1^2 \cdot \frac{8}{81} + 2^2 \cdot \frac{24}{81} + 3^2 \cdot \frac{32}{81} + 4^2 \cdot \frac{16}{81} - \left(\frac{8}{3}\right)^2$$

$$= \frac{1}{81}(8 + 96 + 288 + 256) - \frac{64}{9}$$

$$= \underbrace{\frac{648}{81}}_{8} - \frac{64}{9} = \frac{72 - 64}{9} = \frac{8}{9}$$ となって，答えだ！