演習問題 103　● マルコフ過程 ●

確率分布 $\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$ $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ が次式をみたすものとする。

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} \cdots\cdots①\quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

(ただし，$a_n + b_n = 1$ $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ とする。)　次の問いに答えよ。

(1) $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$ を求めよ。

(2) 極限 $\lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ が存在するものとして，$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ を求めよ。

ヒント！ マルコフ過程は確率分布の漸化式と考えることができる。第 n 回目の確率分布 $f(n)$ に推移確率行列 M をかけると第 $n+1$ 回目の確率分布 $f(n+1)$ になる。つまり，$f(n+1) = M\cdot f(n)$ が，①式のマルコフ過程の方程式になるんだね。

解答＆解説

(1) (ⅰ) $n = 0$ のとき，①は，

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}}_{\text{推移確率行列 } M} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}}_{\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \leftarrow \text{初期の確率分布}} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 4+6 \\ 1+9 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$ である。……② ……………………………………………(答)

(ⅱ) $n = 1$ のとき，①は，

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}}_{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\ (\text{②より})} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$ である。……………………………………………………(答)

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ であるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ である。

よって，$n\to\infty$ のとき，

$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$ ……① は，

$\underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}}_{E\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}} = \underbrace{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}}_{M(\text{推移確率行列})}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ ……③ となる。よって，$M = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ とおくと，

$\underbrace{(E-M)}_{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ より，

$\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

行基本変形
$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

両辺に **5** をかけて，$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\therefore \alpha - 2\beta = 0$ ……④

ここで，$n\to\infty$ のときでも，$a_n + b_n = 1$ は成り立つので，

$\alpha + \beta = 1$ ……⑤

⑤−④より，$3\beta = 1$　$\therefore \beta = \frac{1}{3}$　⑤より，$\alpha + \frac{1}{3} = 1$　$\therefore \alpha = \frac{2}{3}$

以上より，$n\to\infty$ のときの確率分布は，

$$\lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$ である。……………………………………………(答)