演習問題 108　● シュミットの正規直交化法 (Ⅳ) ●

$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\2\\0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_4=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$ で与えられる $\boldsymbol{R}^4$ の基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4\}$ を正規直交基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$ に変換せよ。

ヒント！ シュミットの正規直交化法の手順に従って計算する。少し計算はメンドウだけれど頑張ろう！

解答＆解説

(i) $\boldsymbol{a}_1 \to \boldsymbol{u}_1$　$\|\boldsymbol{a}_1\|=\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}$ より，$\boldsymbol{u}_1=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{a}_1\|}\boldsymbol{a}_1=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\1\\2\\0\end{bmatrix}$ ……(答)

(ii) $\boldsymbol{a}_2 \to \boldsymbol{u}_2$

$$\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2-(\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{u}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix}-\frac{3}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\1\\2\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}2\\4\\0\\2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\1\\2\\0\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\3\\-2\\2\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{a}_2=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1\cdot1+1\cdot2+2\cdot0+0\cdot1)=\dfrac{3}{\sqrt{6}}$, $\dfrac{3}{\sqrt{6}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{6}}=\dfrac{1}{2}$

$$\|\boldsymbol{b}_2\|=\frac{1}{2}\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2+2^2}=\frac{1}{2}\sqrt{18}=\frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ より，}$$

$$\boldsymbol{u}_2=\frac{1}{\|\boldsymbol{b}_2\|}\boldsymbol{b}_2=\frac{2}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\3\\-2\\2\end{bmatrix}=\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\3\\-2\\2\end{bmatrix} \text{ ……(答)}$$

(iii) $\boldsymbol{a}_3 \to \boldsymbol{u}_3$

$$\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_3-\{(\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{a}_3)\boldsymbol{u}_1+(\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{a}_3)\boldsymbol{u}_2\}$$

$\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{a}_3=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1+0+2+0)=\dfrac{3}{\sqrt{6}}$, $\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{a}_3=\dfrac{1}{3\sqrt{2}}(1+0-2+4)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\2\end{bmatrix}-\left(\frac{3}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\1\\2\\0\end{bmatrix}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\3\\-2\\2\end{bmatrix}\right)$$

$\dfrac{3}{\sqrt{6}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{6}}=\dfrac{3}{6}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{3\sqrt{2}}=\dfrac{1}{6}$

$$b_3 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\2\end{bmatrix} - \frac{1}{6}\left(\begin{bmatrix}3\\3\\6\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\3\\-2\\2\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\-3\\1\\5\end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{6}\begin{bmatrix}4\\6\\4\\2\end{bmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\3\\2\\1\end{bmatrix}$$

$\|b_3\| = \frac{1}{3}\sqrt{1^2+(-3)^2+1^2+5^2} = \frac{1}{3}\sqrt{1+9+1+25} = \frac{1}{3}\sqrt{36} = \frac{6}{3} = 2$ より，

$$u_3 = \frac{1}{\|b_3\|}b_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\-3\\1\\5\end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}1\\-3\\1\\5\end{bmatrix}$$ ……………………………(答)

(iv) $a_4 \longrightarrow u_4$

$$b_4 = a_4 - \{(u_1\cdot a_4)u_1 + (u_2\cdot a_4)u_2 + (u_3\cdot a_4)u_3\}$$

$\frac{1}{\sqrt{6}}(1+0+0+0) = \frac{1}{\sqrt{6}}$ $\frac{1}{3\sqrt{2}}(1+0+0+2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\frac{1}{6}(1+0+0+5) = 1$

$$= \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix} - \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\1\\2\\0\end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\3\\-2\\2\end{bmatrix} + 1\cdot\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1\\-3\\1\\5\end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{6}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\2\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\3\\-2\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\-3\\1\\5\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{6}\begin{bmatrix}3\\1\\1\\7\end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}3\\-1\\-1\\-1\end{bmatrix}$$

$\|b_4\| = \frac{1}{6}\sqrt{3^2+(-1)^2+(-1)^2+(-1)^2} = \frac{\sqrt{12}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ より，

$$u_4 = \frac{1}{\|b_4\|}b_4 = \frac{3}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{6}\begin{bmatrix}3\\-1\\-1\\-1\end{bmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{6}\begin{bmatrix}3\\-1\\-1\\-1\end{bmatrix}$$ ……………………………(答)