演習問題 117　● ハミルトンの正準方程式（Ⅱ）●

質量を無視できる長さ l の軽い糸の上端 **O** を天井に固定し，下端に質量 m の重り **P** を付けて単振り子を作る。この単振り子の振れ角 θ が十分に小さいとき，この運動はハミルトンの正準方程式：

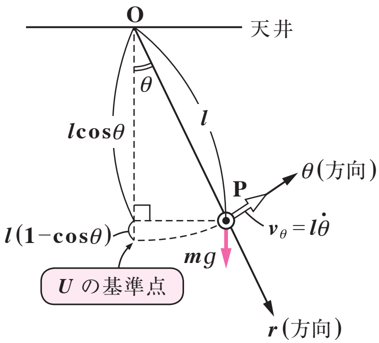
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \cdots\cdots(*1) \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} \quad \cdots\cdots(*2)$$

で表される。これから，ニュートンの運動方程式：$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta$ ……(＊) $\left(\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}\right)$ を導け。

ヒント！ これは，演習問題 **115(P211)** と同じ設定の問題だね。今回は，ラグランジュの運動方程式ではなく，ハミルトンの正準方程式 $(*1)$，$(*2)$ からニュートンの運動方程式：$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta$ を導く問題だ。ハミルトニアン H は $H = p\dot{\theta} - L$ から求めよう。

解答＆解説

質点 **P** が，鉛直下向きより十分小さな角 θ だけ振れた位置にあるとき，



$$\begin{cases} \text{運動エネルギー：} T = \dfrac{1}{2}m\underbrace{v_\theta{}^2}_{(l\dot{\theta})^2} = \dfrac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \\ \text{ポテンシャルエネルギー：} U = mgl(1-\cos\theta) \end{cases}$$

よって，ラグランジアン $L(=T-U)$ は，

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1-\cos\theta) \quad \cdots\cdots①$$

よって，一般化運動量 p は，

$$p = \frac{dL}{d\dot{\theta}} = \frac{d}{d\dot{\theta}}\left\{\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{定数}}ml^2\dot{\theta}^2 - \underbrace{\cancel{mgl(1-\cos\theta)}}_{\text{定数扱い}}\right\} = \frac{1}{\cancel{2}}ml^2\cdot\cancel{2}\dot{\theta} \quad \therefore\ p = ml^2\dot{\theta} \quad \cdots②$$

運動量の式

よって，ハミルトニアン H は，$H = \underbrace{p}_{ml^2\dot{\theta}\ (②より)}\dot{\theta} - \underbrace{L}_{\left\{\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1-\cos\theta)\right\}\ (①より)}$ ……③ より，

$$H = ml^2\dot{\theta}^2 - \left\{\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1-\cos\theta)\right\}$$

よって，$H=\dfrac{1}{2}ml^2\underbrace{\dot{\theta}^2}_{\left(\frac{p}{ml^2}\right)^2=\frac{p^2}{m^2l^4}}+mgl(1-\cos\theta)$ （②より）

$p=ml^2\dot{\theta}$ ……②

$H=p\dot{\theta}-L$ ……③

$$=\frac{p^2}{2ml^2}+mgl(1-\cos\theta) \quad \cdots\cdots④$$ となる。

H は，θ と p の式で表す。

これから，ハミルトンの正準方程式により，ニュートンの単振動の方程式を導く。

ハミルトンの正準方程式

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p} \quad \cdots\cdots\cdots(*1)$$

$$\frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial \theta} \quad \cdots\cdots(*2)$$

（今回は変数は，x ではなく，θ である。）

(i) $\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{\partial H}{\partial p}$ ……$(*1)$ より，

$$\dot{\theta}=\frac{\partial}{\partial p}\left\{\underbrace{\frac{1}{2ml^2}}_{定数}p^2+\underbrace{\cancel{mgl(1-\cos\theta)}}_{定数扱い}\right\}$$

$$=\frac{\cancel{2}p}{\cancel{2}ml^2}=\frac{p}{ml^2}$$ これから，$p=ml^2\dot{\theta}$ ……⑤ が導ける。

これは，②と等しい

(ii) $\dfrac{dp}{dt}=-\dfrac{\partial H}{\partial \theta}$ ……$(*2)$ より，

$$\frac{d}{dt}\underbrace{(ml^2\dot{\theta})}_{②より}=-\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\underbrace{\cancel{\frac{p^2}{2ml^2}}}_{定数扱い}+\underbrace{mgl}_{定数}(1-\cos\theta)\right\}$$ よって，

$$ml^2\ddot{\theta}=-mgl\cdot\underbrace{\sin\theta}_{\theta\ (\because\ \theta\fallingdotseq 0)}$$ $\theta\fallingdotseq 0$ より，$\sin\theta\fallingdotseq\theta$

よって，$\cancel{m}l^2\ddot{\theta}=-\cancel{m}gl\cdot\theta$ より，$\ddot{\theta}=-\dfrac{g}{l}\theta$

ここで，$\dfrac{g}{l}=\omega^2$ とおくと，ニュートンの運動方程式：

$\ddot{\theta}=-\omega^2\theta$ ……$(*)$ $\left(\omega=\sqrt{\dfrac{g}{l}}\right)$ が導かれる。……………………………(答)