補充問題 4　難易度 ★★　数列の和と漸化式

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n と表す。$S_n = 2^{n+1} - a_n$ …①
$(n = 1, 2, 3, \cdots)$ が成り立つとき，次の問いに答えよ。

(1) a_1，a_2，a_3 を求めよ。

(2) a_{n+1} を a_n の式で表し，一般項 a_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ。

（福井大＊）

ヒント！ (1) では，①式に $n = 1, 2, 3$ を代入して，a_1, a_2, a_3 を求めればよい。(2) では，①より $S_{n+1} = 2^{n+2} - a_{n+1}$ …②とし，②－①から a_{n+1} と a_n の関係式（漸化式）が求められる。後は，等比関数列型漸化式：$F(n+1) = r \cdot F(n)$ の形にもち込んで解いていこう。

解答＆解説

(1) $S_n = 2^{n+1} - a_n$ ……① $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ について，

(i) $n = 1$ のとき，$\underbrace{S_1}_{a_1} = 2^{1+1} - a_1$ より，

$a_1 = 4 - a_1$　$2a_1 = 4$　$\therefore a_1 = 2$ ………(答)

(ii) $n = 2$ のとき，$\underbrace{S_2}_{a_1+a_2=2+a_2} = 2^{2+1} - a_2$ より，

$2 + a_2 = 8 - a_2$　$2a_n = 6$　$\therefore a_2 = 3$ ……(答)

(iii) $n = 3$ のとき，$\underbrace{S_3}_{a_1+a_2+a_3=2+3+a_3} = 2^{3+1} - a_3$

$5 + a_3 = 16 - a_3$　$2a_3 = 11$　$\therefore a_3 = \dfrac{11}{2}$ …(答)

(2) ①式の n に $n+1$ を代入すると，

$S_{n+1} = 2^{n+2} - a_{n+1}$ ……②　$(n = \underline{0}, 1, 2, \cdots)$

n は 0 スタート！

②－①より，

$\underbrace{S_{n+1}}_{(\cancel{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}+a_{n+1})} - \underbrace{S_n}_{(\cancel{a_1+a_2+\cdots+a_n})} = 2^{n+2} - a_{n+1} - (2^{n+1} - a_n)$　$(n = \underline{1}, 2, 3, \cdots)$

$n \geqq 0$ かつ $n \geqq 1$ より，
n は 1 スタートとなる。

これだけ残る。

ココがポイント

⇦ $S_1 = a_1$
$S_2 = a_1 + a_2$
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

⇦ $S_{n+1} = 2^{n+1+1} - a_{n+1}$
$S_{n+1} = 2^{n+2} - a_{n+1}$ ……②
このとき，n は，
$n = \underline{0}, 1, 2, \cdots$
0 スタートとなる
②は，
$S_n = 2^{n+1} - a_n$ ……①
のときの，
$n = \underline{1}, 2, 3, \cdots$ と同じだ。
1 スタート

$a_{n+1} = 2^2 \cdot 2^n - a_{n+1} - 2 \cdot 2^n + a_n$ より，

$a_{n+1} = \dfrac{1}{2} a_n + 2^n$ ……③ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ となる。

……(答)

⇦ $2a_{n+1} = a_n + 2 \cdot 2^n$

$a_{n+1} = \dfrac{1}{2} a_n + 2^n$

(漸化式)

③を $F(n+1) = \dfrac{1}{2} \cdot F(n)$……④の形にするために，定数 α を用いて，

$$\begin{cases} F(n) = a_n + \alpha \cdot 2^n \text{ ……………………⑤ とおくと，} \\ F(n+1) = a_{n+1} + \alpha \cdot 2^{n+1} \text{………⑥ となる。} \end{cases}$$

⇦ $F(n) = a_n + \alpha \cdot 2^n$ の n の代わりに $n+1$ を代入すると，
$F(n+1) = a_{n+1} + \alpha \cdot 2^{n+1}$
となる。
このように，自分で，
$F(n+1) = r \cdot F(n)$ の形になるように，デザインすることがポイントなんだね。

⑤，⑥を④に代入して，

$a_{n+1} + \alpha \cdot 2^{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + \alpha \cdot 2^n)$ ………④´となる。

これを変形して，

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \frac{\alpha}{2} \cdot 2^n - 2\alpha \cdot 2^n$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n \underbrace{- \frac{3}{2}}_{1} \alpha \cdot 2^n \text{ ……⑦}$$

③と⑦を比較して，$-\dfrac{3}{2}\alpha = 1$ より，$\alpha = -\dfrac{2}{3}$

これを④´に代入して，

$$a_{n+1} - \frac{2}{3} \cdot 2^{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n - \frac{2}{3} \cdot 2^n\right)$$

$$\left[\ F(n+1) \quad = \frac{1}{2} \cdot \quad F(n)\ \right]$$

アッ！という間

$$a_n - \frac{2}{3} \cdot 2^n = \left(\underset{2}{a_1} - \frac{2}{3} \cdot 2^1\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\left[\ F(n) \quad = \quad F(1) \quad \cdot \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\ \right]$$

⇦ $a_n - \dfrac{1}{3} \cdot 2^{n+1} = \underbrace{\left(2 - \dfrac{4}{3}\right)}_{\frac{2}{3}} \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$a_n = \dfrac{1}{3} \cdot 2^{n+1} + \dfrac{2}{3} \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$= \dfrac{1}{3}\left\{2^{n+1} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}$

これに $a_1 = 2$ を代入すると一般項 a_n は，

$$a_n = \frac{1}{3}\left\{2^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

となる。………………………………………………(答)