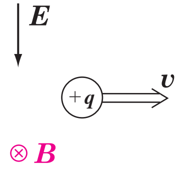
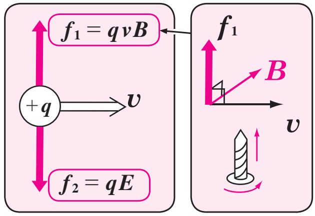


$(ex1)$ 右図のように，一様な電場 $\boldsymbol{E}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}$ が存在する真空中を，$+q$ (C) の荷電粒子が，$\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{E}$ かつ $\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{B}$ となるような速度 $\boldsymbol{v}$ で運動している。この荷電粒子が等速直線運動を続けているとき，速さ $v\ (=\|\boldsymbol{v}\|)$ を，$E\ (=\|\boldsymbol{E}\|)$ と $B\ (=\|\boldsymbol{B}\|)$ で表してみよう。ただし，この荷電粒子に働く重力は無視できるものとする。



(解答) 右図に示すように，$+q$ (C) の荷電粒子に働く力は，上向きに $f_1 = qvB$ と下向きに $f_2 = qE$ の 2 つだけだね。よって，この 2 つが等しいとき，この荷電粒子に働く合力は 0 となって等速直線運動を続けることができる。よって，

$$\cancel{q}vB = \cancel{q}E$$

$\therefore\ v = \dfrac{E}{B}$ となる。

E (N/C)，B (N/Am) より，$v = \dfrac{E}{B}$ の単位は

$\left[\dfrac{\text{N/C}}{\text{N/Am}}\right] = \left[\dfrac{\overset{\text{C/s}}{\text{A}}\text{m}}{\text{C}}\right] = [\text{m/s}]$ となって OK だ！

では，$(ex1)$ と関連した，より本格的な次の例題を解いてみよう。

例題 29

一様な電場 $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 2 \\ -19 \\ -10 \end{bmatrix}$ (N/C) と一様な磁束密度 $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ (wb/m²)

が存在する。真空中を，$+q$ (C) の荷電粒子が，速度 $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ (m/s)

で等速直線運動しているものとする。この荷電粒子に働く重力は無視できるものとし，また，x と y は正の整数とする。これらの条件をみたす磁束密度 $\boldsymbol{B}$ をすべて求めよう。

今回の問題では，$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E} = 1\times2 + (-2)\times(-19) + 4\times(-10) = 2 + 38 - 40 = 0$ より，$\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{E}$ だけれど，特に $\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{B}$ の条件は設けていない。この荷電粒子は，等速度運動をするので，これに働く力は $\mathbf{0}$ (N) となるんだね。そして，

今回重力は無視できるので，この粒子に働くローレンツ $\boldsymbol{f}$ が $\boldsymbol{0}$ (N) になればいい。よって，

$\boldsymbol{f} = \underbrace{q}_{\oplus\text{の定数}}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{0}$ より，$\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$

$\therefore\ \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{E}$ ……① が成り立つことになる。

ここで，$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ (m/s)，$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ (wb/m^2) (ただし x と y は正の整数)，

$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 2 \\ -19 \\ -10 \end{bmatrix}$ (N/C) ……② より，

外積 $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ を求めると，

$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -4y-2z \\ 4x-z \\ y+2x \end{bmatrix}$ ……③ となる。

$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ の計算

$$\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 4 & 1 \\ x & y & z & x \end{array}$$

$y+2x$][$-2z-4y$，$4x-z$，

よって，②，③を①に代入すると，$\begin{bmatrix} -4y-2z \\ 4x-z \\ y+2x \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 2 \\ -19 \\ -10 \end{bmatrix}$ より，

これから，未知数 x，y，z の次の 3 元 1 次連立方程式：

$-4y-2z=-2$ の両辺を -2 で割ったもの

$$\begin{cases} 2y + z = 1 & \cdots\cdots④ \\ 4x - z = 19 & \cdots\cdots⑤ \\ y + 2x = 10 & \cdots\cdots⑥ \end{cases}$$

が導かれる。

しかし，④＋⑤より，$2y + 4x = 20$，すなわち $y + 2x = 10$ となって，これは⑥と一致するので，この解は一意には定まらない。すなわち，解が無数に存在する不定解となる。ここで，x と y は共に正の整数であるので，

$2x + y = 10$ ……⑥ をみたす正の整数の組 (x, y) を調べると全部で，

$(x, y) = (1, 8)$，$(2, 6)$，$(3, 4)$，$(4, 2)$ の 4 通りのみである。よって，

(i) $(x, y) = (1, 8)$ のとき，④より，$z = 1 - 2y = 1 - 16 = -15$

(ii) $(x, y) = (2, 6)$ のとき，④より，$z = 1 - 2y = 1 - 12 = -11$

(iii) $(x, y) = (3, 4)$ のとき，④より，$z = 1 - 2y = 1 - 8 = -7$

(iv) $(x, y) = (4, 2)$ のとき，④より，$z = 1 - 2y = 1 - 4 = -3$　となる。

以上より，求める磁束密度 $\boldsymbol{B}(\mathrm{wb/m^2})$ は，全部で次の 4 通りとなるんだね。

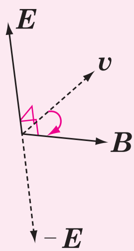
(ⅰ) $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1\\8\\-15\end{bmatrix}$, (ⅱ) $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2\\6\\-11\end{bmatrix}$, (ⅲ) $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3\\4\\-7\end{bmatrix}$, (ⅳ) $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}4\\2\\-3\end{bmatrix}$

参考

今回の問題では，$\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{B}$ の条件は満たしていないが，各 4 通りの $\boldsymbol{B}$ に対して，内積 $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{E}$ を求めてみると，たとえば (ⅰ) の場合，

(ⅰ) $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1\\8\\-15\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\-19\\-10\end{bmatrix}=1\times2+8\times(-19)+(-15)\times(-10)$

$=2-152+150=0$ となる。

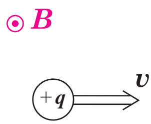


(ⅱ), (ⅲ), (ⅳ) の $\boldsymbol{B}$ についても，$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{E}=0$ となる。従って，$\boldsymbol{B}\perp\boldsymbol{E}$ であることが分かる。この結果は，

$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{E}$ ……① を図示した右図より，

明らかに，$\boldsymbol{B}\perp\boldsymbol{E}$ (および $\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{E}$) が成り立つからなんだね。納得いった？

(*ex*2) 右図に示すように，一様な磁束密度 $\boldsymbol{B}$ が存在する真空中に，質量 m，電荷 $+q$ をもつ荷電粒子に $\boldsymbol{B}$ と垂直となるように初速度 $\boldsymbol{v}$ を与えた。このとき，この荷電粒子がどのような運動をするか？調べてみよう。ただし，電場は存在せず，荷電粒子に働く重力も無視できるものとする。



(解答) 右図に示すように，この荷電粒子は磁束密度 $\boldsymbol{B}$ と速度 $\boldsymbol{v}$ のいずれにも垂直となる向きにローレンツ力 $\boldsymbol{f}$ を受ける。この場合，速度 $\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{f}$ より速度 $\boldsymbol{v}$ は**大きさ**を変えることなく**向き**のみを変化させることになるので，ローレンツ力 $\boldsymbol{f}$ の大きさも変化せず，常に速度 $\boldsymbol{v}$ の向きと直交することになる。従って，このローレンツ力は**円運動**の向心力に