演習問題 116　● ハミルトンの正準方程式 ●

自然長が l_1，l_2，バネ定数が k_1，k_2 の **2** 本のバネがある。質量 m の質点 **P** の両側にこの **2** 本のバネの一端を結び付けたものを，滑らかな水平面上に置き，さらに **2** 本のバネの他端を壁に固定した。平衡状態の **P** の位置を原点 **0**，水平右向きに x 軸をとる。この状態から **P** を右方向に B_1 だけずらして，静かに手を離した後の運動は，ハミルトンの正準方程式：

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\partial H}{\partial p}$ ……(＊1)　$\dfrac{dp}{dt}=-\dfrac{\partial H}{\partial x}$ ……(＊2) で表される。これから，

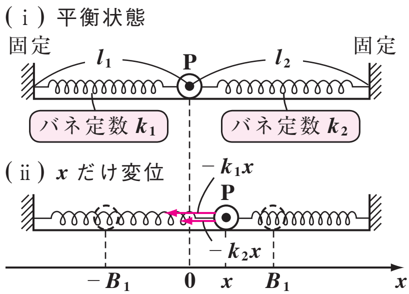
ニュートンの運動方程式：$\ddot{x}=-\omega^2 x$ ……(＊)′ $\left(\omega=\sqrt{\dfrac{k_1+k_2}{m}}\right)$ を導け。

ヒント！ これは演習問題 **114**(**P210**) と同じ設定の問題だね。ここでは，正準方程式(＊1)，(＊2) から，ニュートンの運動方程式：$\ddot{x}=-\omega^2 x$……(＊)′ を導いてみよう。

解答＆解説

平衡状態から x だけずれた位置に **P** があるとき，

$$\begin{cases} \text{運動エネルギー：} T=\dfrac{1}{2}m\dot{x}^2 \\ \text{ポテンシャルエネルギー：} U=\dfrac{1}{2}k_1x^2+\dfrac{1}{2}k_2x^2 \end{cases}$$



よって，ラグランジアン $L(=T-U)$ は，

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{k_1+k_2}{2}x^2 \text{ ……①}$$ となる。

よって，一般化運動量 p は，

$$p=\frac{dL}{d\dot{x}}=\frac{d}{d\dot{x}}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\underbrace{\cancel{\frac{k_1+k_2}{2}x^2}}_{\text{定数扱い}}\right)=m\dot{x} \quad \therefore\ p=m\dot{x} \text{ ……②}$$

運動量の式

これが H の正式な求め方だ！

よって，ハミルトニアン H は，$H=p\dot{x}-L$……③ より，

①，②を③に代入して，

$$H = m\dot{x}^2 - \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{k_1+k_2}{2}x^2\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{x}^2}_{\frac{(m\dot{x})^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}\ (②より)} + \frac{k_1+k_2}{2}x^2$$

H を x と p の式で表す。

$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{k_1+k_2}{2}x^2$ ……①

$P = m\dot{x}$ ……②

$H = p\cdot\dot{x} - L$ ……③

$$\therefore\ H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k_1+k_2}{2}x^2 \quad \cdots\cdots ④$$

となる。よって，ハミルトンの正準方程式から，ニュートンの単振動の運動方程式を導く。

ハミルトンの正準方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p} & \cdots\cdots(*1) \\ \dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} & \cdots\cdots(*2) \end{cases}$$

(i) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p}$ ……(＊1) より，

$$\dot{x} = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{p^2}{2m} + \underbrace{\cancel{\frac{k_1+k_2}{2}x^2}}_{定数扱い}\right) = \frac{2p}{2m} = \frac{p}{m} \quad より，$$

これから，$p = m\dot{x}$ ……② が導ける。

これは，無駄に思えるかもしれないけれど，ハミルトンの正準方程式は (＊1) と (＊2) のペアで，いつも考える！

(ii) $\dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}$ ……(＊2) より，

$$\underbrace{\frac{d}{dt}(m\dot{x})}_{m\ddot{x}} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\underbrace{\cancel{\frac{p^2}{2m}}}_{定数扱い} + \frac{k_1+k_2}{2}x^2\right) \qquad m\ddot{x} = -\frac{k_1+k_2}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}x$$

∴ニュートンの単振動の運動方程式：

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \quad \cdots\cdots(*)' \quad \left(\omega = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}\right)$$ が導かれる。………………(答)