演習問題 26　●2 次形式の標準形への変換 (Ⅱ)●

2 次曲線 $-x^2+6\sqrt{3}\,xy+5y^2=8$ ……① の左辺 (2 次形式) を標準形に直して，これが双曲線であることを確認せよ。

ヒント！ ①の左辺 $=-1\cdot x^2+2\cdot 3\sqrt{3}\,xy+5\cdot y^2=[x,\ y]A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ の形にして，行列 A を対角化するための変換行列として，直交行列 U を求めて $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=U\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ により，$[x\ \ y]$ から，$[x'\ \ y']$ に変数を変換していこう。

解答＆解説

$-1\cdot x^2+2\cdot 3\sqrt{3}\,xy+5y^2=8$ ……①の左辺を，新たな変数 x'，y' を用いて，標準形に変換する。

①の左辺 $=[x\ \ y]\begin{bmatrix} -1 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ……② とおく。

ここで，$A=\begin{bmatrix} -1 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 5 \end{bmatrix}$ とおき，$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$，すなわち

$T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ ……③ (ただし，$T=A-\lambda E$) をみたす λ と $\boldsymbol{x}$ を求める。

固有方程式 $|T|=\begin{vmatrix} -1-\lambda & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 5-\lambda \end{vmatrix}=\underbrace{(-1-\lambda)(5-\lambda)}_{\substack{(\lambda+1)(\lambda-5)\\=\lambda^2-4\lambda-5}}-\underbrace{(3\sqrt{3})^2}_{27}=0$ より，

$\lambda^2-4\lambda-32=0$　　$(\lambda-8)(\lambda+4)=0$　　$\therefore\ \lambda=\underbrace{8}_{\lambda_1},\ \underbrace{-4}_{\lambda_2}$

(i) $\lambda_1=8$ のとき，③を $T_1\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{0}$　そして，$\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$ とおくと，

$$\begin{bmatrix} -9 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\qquad \therefore\ \sqrt{3}\,\alpha_1-\alpha_2=0$$

・$-9\alpha_1+3\sqrt{3}\,\alpha_2=0$ は，両辺を $-3\sqrt{3}$ で割る。
・$3\sqrt{3}\,\alpha_1-3\alpha_2=0$ は，両辺を 3 で割る。

ここで，$\alpha_1=k_1$ とおくと，$\alpha_2=\sqrt{3}\,k_1$　$\therefore\ \boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix} k_1 \\ \sqrt{3}\,k_1 \end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$

$\|\boldsymbol{x}_1\|=1$ とするために，$k_1=\dfrac{1}{2}$ とおく。　$\therefore\ \boldsymbol{x}_1=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$

(ii) $\lambda_2 = -4$ のとき，③を $T_2 \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$　　そして，$\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$ とおくと，

$$\begin{bmatrix} 3 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \therefore \beta_1 + \sqrt{3}\beta_2 = 0$$

・$3\beta_1 + 3\sqrt{3}\beta_2 = 0$ は，両辺を 3 で割る。
・$3\sqrt{3}\beta_1 + 9\beta_2 = 0$ は，両辺を $3\sqrt{3}$ で割る。

ここで，$\beta_2 = k_2$ とおくと，$\beta_1 = -\sqrt{3}k_2$　$\therefore \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}k_2 \\ k_2 \end{bmatrix} = k_2 \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$

$\|\boldsymbol{x}_2\| = 1$ とするために，$k_2 = \dfrac{1}{2}$ とおく。　$\therefore \boldsymbol{x}_2 = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$

よって，A を対角化する直交行列 U は，

$U = [\boldsymbol{x}_1 \ \ \boldsymbol{x}_2] = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$ となり，これを用いて A を対角化すると，

$$U^{-1}AU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots ④$$

ここで，新たな変数 x', y' を

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ ……⑤と定義する。⑤の両辺を転置すると，

${}^t\!\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = {}^t\!\left(U \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\right) = {}^t\!\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} {}^tU$ より，$[x \ \ y] = [x' \ \ y']U^{-1}$ ……⑤′ となる。

⑤と⑤′を②に代入して，

$$[x' \ \ y'] \underbrace{U^{-1}AU}_{\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} (④より)} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = [x' \ \ y'] \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$= [8x' \ \ -4y'] \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 8x'^2 - 4y'^2 \quad (=①の左辺)$$

これを①の左辺に代入すると，

$8x'^2 - 4y'^2 = 8$ より，双曲線 $x'^2 - \dfrac{y'^2}{2} = 1$ が導ける。 …………………(終)

直交行列 U による直交変換では，図形の形はそのままに保存されるので，元の①式も双曲線であることが分かるんだね。