少し複雑な計算だったので，(c)の検算をやっておこう。(c)の n に $n=1$ を代入して，$A^1=A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ となるか？否か？を確認しておくといいんだね。

(c)に $n=1$ を代入すると，

$$A^1=\begin{bmatrix} 2^1-1\cdot 2^0 & -1\cdot 2^0 \\ 1\cdot 2^0 & 2^1+1\cdot 2^0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2-1 & -1 \\ 1 & 2+1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}(=A)$$

となって，無事 A になるので，この計算もまず間違っていないってことが確認できたんだね。

ここでも，A を $P^{-1}AP$ により，ジョルダン細胞にするための行列 P をどのように求めるのか？疑問に思っておられる方も多いと思う。でも，そのためには，より本格的な“**線形代数**”の解説が必要となるため，ここでは，残念だけれど，割愛する以外にない。

しかし，その疑問を持って，大学の線形代数の講義に臨めば，よりスムーズに理解が進み，疑問も氷解することと思う。

つまり，大学数学に進むための基礎が，これで出来たということなんだね。頑張って頂きたい。

● 複素行列の n 乗計算にもチャレンジしよう！

では，この章の最後に，行列の要素が複素数である複素行列 A の対角化と，それによる A^n 計算についても例題で解説しておこう。複素行列 A に対してある複素行列 P を用いて，$P^{-1}AP$ により対角化して，$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$ の形にもち込む。後は，この両辺を n 乗して，A^n を求めればいい。本質的に解法のパターンは実行列のときと同様なので，違和感なく計算できると思う。

例題 69　$A=\begin{bmatrix}-2 & 2i\\ -2i & 1\end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix}1 & -2i\\ -2i & 1\end{bmatrix}$ について，

(i) $P^{-1}AP$ を求めて，(ii) A^n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を求めよう。

(ただし，i は虚数単位 $(i^2=-1)$ を表す。)

(i) まず，P^{-1} を求めると，

$$P^{-1}=\frac{1}{1\times1-\underbrace{(-2i)^2}_{4i^2=(-4)}}\begin{bmatrix}1 & 2i\\ 2i & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{1+4}\begin{bmatrix}1 & 2i\\ 2i & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & 2i\\ 2i & 1\end{bmatrix}$$ となる。

よって，$P^{-1}AP$ を求めると，

$$P^{-1}AP=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & 2i\\ 2i & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 2i\\ -2i & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2i\\ -2i & 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-2-4\overset{(-1)}{i^2} & 2i+2i\\ -4i-2i & 4\underset{(-1)}{i^2}+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2i\\ -2i & 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}2 & 4i\\ -6i & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2i\\ -2i & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}2-8\overset{(-1)}{i^2} & \cancel{-4i+4i}\\ \cancel{-6i+6i} & 12\underset{(-1)}{i^2}-3\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}10 & 0\\ 0 & -15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}\ \cdots\cdots ①$$ となって，対角化できた。

(ii) ①の両辺を n 乗して，変形すると，

$$\underbrace{(P^{-1}AP)^n}_{P^{-1}A^nP}=\underbrace{\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}^n}_{\begin{bmatrix}2^n & 0\\ 0 & (-3)^n\end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}\alpha^n & 0\\ 0 & \beta^n\end{bmatrix}$$

$$P^{-1}A^nP=\begin{bmatrix}2^n & 0\\ 0 & (-3)^n\end{bmatrix}\ \cdots\cdots ②$$ となる。

②の両辺に，左から P，右から P^{-1} をかけると，

$$A^n = P\begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{bmatrix}P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2i \\ -2i & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2i \\ 2i & 1 \end{bmatrix}$$

定数係数は前に出せる。

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2^n & -2i\cdot(-3)^n \\ -2i\cdot 2^n & (-3)^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2i \\ 2i & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2^n & -2\cdot(-3)^n i \\ -2^{n+1}i & (-3)^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2i \\ 2i & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2^n-4(-3)^n\cdot \overset{-1}{i^2} & 2^n\cdot 2i-2\cdot(-3)^n i \\ -2^{n+1}i+(-3)^n\cdot 2i & -2^{n+1}\cdot 2\cdot \underset{-1}{i^2}+(-3)^n \end{bmatrix}$$

以上より，

$$A^n = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2^n+4\cdot(-3)^n & 2\{2^n-(-3)^n\}i \\ 2\{-2^n+(-3)^n\}i & 2^{n+2}+(-3)^n \end{bmatrix} \quad (n=1,\ 2,\ \cdots) \quad \cdots\cdots③$$

となって，答えが求まるんだね。

③も，$n=1$ のとき，$A=\begin{bmatrix} -2 & 2i \\ -2i & 1 \end{bmatrix}$ と一致するか？否か？確認しておこう。

$n=1$ のとき，③は，

$$A^1 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2+4\cdot(-3) & 2(2+3)i \\ 2(-2-3)i & 8-3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -10 & 10i \\ -10i & 5 \end{bmatrix}$$

$=\begin{bmatrix} -2 & 2i \\ -2i & 1 \end{bmatrix}$ となって，A と一致することが確認できたので，検算も終了です。面白かった？

以上で，行列と 1 次変換の授業は終了です。よく復習して，知識を定着させよう！