$\therefore\ E(r,\ t) = \dfrac{1}{r} f\left(t - \dfrac{r}{c}\right)$ ……⑤ $(r \geqq 1)$ となる。

ここで，境界条件より，$E(1,\ t) = E_0 \sin\omega t$ ……① より，⑤は，

$$E(1,\ t) = \frac{1}{1} f\left(t - \underbrace{\boxed{\frac{1}{c}}}_{\fallingdotseq 0}\right) \fallingdotseq f(t) = E_0 \sin\omega t \quad となる。$$

0 $(r = 1(\mathrm{m})$ とすると，$c = 3 \times 10^8(\mathrm{m/s})$ より)

これから，$f\left(t - \dfrac{r}{c}\right) = E_0 \sin\omega\left(t - \dfrac{r}{c}\right)$ ……⑥ となる。

⑥を⑤に代入して，求める電場の球面波 $E(r,\ t)$ は，

$$E(r,\ t) = \frac{E_0}{r} \sin\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)$$ となって，求まるんだね。納得いった？

ここで，1 次元波動方程式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{1}{v^2} \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ …$(*o)$ のダランベールの解：

$u(x,\ t) = \underbrace{f\left(t - \dfrac{x}{v}\right)}_{進行波} + \underbrace{g\left(t + \dfrac{x}{v}\right)}_{後退波}$ について，物理的な解説をしておこう。

角振動数 ω と波数 κ（カッパ）は，それぞれ，$\omega T = 2\pi$ ……ⓐ $\kappa = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ ……ⓑ

(T：周期，λ：波長)で定義される。このとき，波動の伝播速度 (位相速度)

v は，$v = \dfrac{\lambda}{T}$ ……ⓒ と表される。ⓐ，ⓑより，$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ ……ⓐ´，

$\lambda = \dfrac{2\pi}{\kappa}$ ……ⓑ´ より，ⓐ´，ⓑ´ をⓒに代入すると，

$$v = \frac{\ \dfrac{\cancel{2\pi}}{\kappa}\ }{\dfrac{\cancel{2\pi}}{\omega}} \quad \therefore\ v = \frac{\omega}{\kappa}$$ ……ⓓ と表される。よって，ⓓをダランベールの

解に代入すると，$u(x,\ t) = f\left(t - \dfrac{\kappa x}{\omega}\right) + g\left(t + \dfrac{\kappa x}{\omega}\right)$ と表される。

よって，$f\left(t - \dfrac{\kappa x}{\omega}\right) = \underline{f\left(\dfrac{1}{\omega}(\omega t - \kappa x)\right)}$ と $g\left(t + \dfrac{\kappa x}{\omega}\right) = \underline{g\left(\dfrac{1}{\omega}(\omega t + \kappa x)\right)}$ より，

これを，$\omega t - \kappa x$ の関数として
新たに $f(\omega t - \kappa x)$ とおける。

これを，$\omega t + \kappa x$ の関数として
新たに $g(\omega t + \kappa x)$ とおける。

これら 2 つの関数はそれぞれ新たに $f(\omega t - \kappa x)$，$g(\omega t + \kappa x)$ とおけるので，

1 次元波動方程式：$u_{xx} = \dfrac{1}{v^2} u_{tt}$ ……$(*o)$ のダランベールの解は，

$u(x,\ t) = \underbrace{f(\omega t - \kappa x)}_{\text{進行波}} + \underbrace{g(\omega t + \kappa x)}_{\text{後退波}}$　(ω：角振動数，κ：波数)

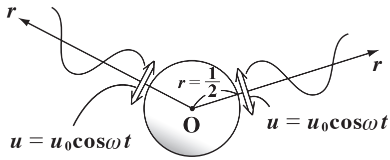
と表すこともできるんだね。

では，もう 1 題，球面波の例題を解いてみよう。

例題 41　右図に示すように，原点 **O** を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の球面上に，次のような波動の変位

$u = u_0 \cos\omega t$ ……①

(u_0，ω：正の定数) を発生させたとき，この波動が半径 r の方向に球面波として外向きに伝播していくものとする。この波動の変位 $u(r,\ t)$ は次の波動方程式で表されるものとする。



$$\frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2(ru)}{\partial t^2} \quad \cdots\cdots ② \quad \left(v：速度，v = \frac{\omega}{\kappa} とする。\right)$$

②を解いて，$u(r,\ t)$ を求めよう。ただし，$v \gg \omega \gg \kappa$ として，$\omega t - \dfrac{1}{2}\kappa \fallingdotseq \omega t$ と近似してもよいものとする。

②の球面波の波動方程式は，ru を 1 つの従属変数と考えると，ru の 1 次元波動方程式の形になっている。よって，ru のダランベールの解 (進行波のみ) を κ(波数) と ω(角振動数) で表すと，次のようになる。

$ru = \underline{f(\omega t - \kappa r)}$ ……③　(ただし，$\omega = \kappa v$)

この波動は，半径 $r = \dfrac{1}{2}$ の球面から外部に広がるものとして，進行波のみを考える。

③より，一般解 $u(r,\ t)$ は，

$u(r,\ t) = \dfrac{1}{r} f(\omega t - \kappa r)$ ……④　となる。

ここで，境界条件として，$u\left(\frac{1}{2},\ t\right)=u_0\cos\omega t$ ……① が与えられているので，④の r に $r=\frac{1}{2}$ を代入して，①と比較すると，

$$u\left(\frac{1}{2},\ t\right)=\frac{1}{\frac{1}{2}}f\left(\omega t-\frac{1}{2}\kappa\right)=\boxed{2f\left(\omega t-\frac{1}{2}\kappa\right)=u_0\cos\omega t}$$ となる。

よって，$f\left(\omega t-\frac{1}{2}\kappa\right)=\frac{u_0}{2}\cos\omega t$ ……⑤ となる。

ここで，条件：$\underline{v\gg\omega\gg\kappa}$ より，$\underline{\omega t-\frac{1}{2}\kappa\fallingdotseq\omega t}$ と近似すると，⑤は，

> たとえば，$v=1000$，$\omega=1$，$\kappa=0.001$ のような場合，$\omega=\kappa v$ をみたす。
> このとき $\omega t-\underbrace{\frac{1}{2}\kappa}_{\fallingdotseq 0}\fallingdotseq\omega t$ と近似できるんだね。

$f(\omega t)=\frac{u_0}{2}\cos\omega t$ ……⑥ と近似できる。ここで，新たな変数 ζ（ゼータ）を

$\zeta=\omega t$ とおくと，⑥は $f(\zeta)=\frac{u_0}{2}\cos\zeta$ となる。

従って，さらに，ここで，$\zeta=\omega t-\kappa r$ とおくと，

$f(\omega t-\kappa r)=\frac{u_0}{2}\cos(\omega t-\kappa r)$ ……⑦ となる。

⑦を④に代入することにより，特殊解 $u(r,\ t)$ は，

$u(r,\ t)=\frac{u_0}{2r}\cos(\omega t-\kappa r)$ と，求められるんだね。これも，大丈夫だった？

以上で，半径方向 r のみの球座標におけるラプラス方程式と波動方程式の解法の解説は終了です。

次は，u が r と θ(天頂角) の関数である場合の球座標におけるラプラス方程式の解法について解説しよう。いわゆる，ルジャンドルの微分方程式とルジャンドル多項式の問題になる。