演習問題 15 ● ストークスの定理(Ⅱ) ●

ベクトル場 $\boldsymbol{f}=[y,\ 3x,\ 0]$ に，3 点 O(0, 0, 0)，A(4, 0, 0)，B(0, 2, 0) を結んで出来る閉曲線(折線) C と，C で囲まれる平面 (xy 平面上の △OAB) がある。このとき，

ストークスの定理：$\displaystyle\iint_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=\oint_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{p}$ ……(＊)

が成り立つことを確認せよ。

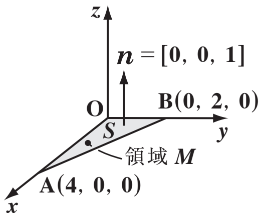
ヒント！ △OAB は，xy 平面上の図形なので，その法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{n}=[0,\ 0,\ 1]$ となる。(＊) の左辺は，$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}$ を求めて面積分し，(＊) の右辺は，(i) O→A，(ii) A→B，(iii) B→O の 3 通りに場合分けして，各線積分の和を求めるといいんだね。

解答＆解説

$\boldsymbol{f}=[y,\ 3x,\ 0]$ の回転を求めると，$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}=[0,\ 0,\ 2]$ となる。また，曲面 S は，xy 平面上の △OAB より，この単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は，$\boldsymbol{n}=[0,\ 0,\ \underbrace{1}_{\cos\gamma}]$ となる。

rot$\boldsymbol{f}$ の計算

$$\begin{array}{cccc} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial x} \\ y & 3x & 0 & y \\ 3-1\ ][& 0, & 0, & \end{array}$$



・$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}=[0,\ 0,\ 2]\cdot[0,\ 0,\ 1]=2$ ……① であり，

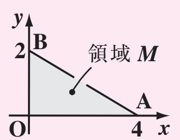
また，$d\boldsymbol{p}=[dx,\ dy,\ dz]$ より，

・$\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{p}=[y,\ 3x,\ 0]\cdot[dx,\ dy,\ dz]=ydx+3xdy$ ……② である。

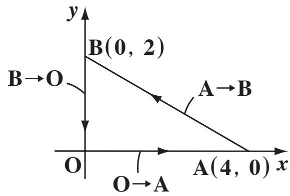
以上より，(＊) の公式の左右両辺を調べると，

$$(\mathrm{I})\ ((＊)の左辺)=\iint_S \underbrace{\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}}_{2(①より)}\ \underbrace{dS}_{\frac{1}{|\cos\gamma|}dxdy}$$

$$=\underbrace{2\iint_M 1\cdot dxdy}_{△OAB の面積のこと。よって，\frac{1}{2}\times4\times2=4}=2\times4=8 \ \cdots\cdots③ \ となる。$$



(Ⅱ) (∗) の右辺の積分路 C に沿った周回線積分は，右図に示すように，3 つの経路の線積分に分解される。



$$((*)\text{の右辺}) = \oint_C \underbrace{\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{p}}_{ydx+3xdy\ (②\text{より})}$$

$$= \oint_C (ydx + 3xdy) = \underbrace{\int_{O\to A}}_{(\mathrm{i})} + \underbrace{\int_{A\to B}}_{(\mathrm{ii})} + \underbrace{\int_{B\to O}}_{(\mathrm{iii})} \quad \cdots\cdots ④$$

各経路の積分を求めると，

(ⅰ) $\displaystyle\int_{O\to A}(\underbrace{y}_{0}\,dx + 3x\,\underbrace{dy}_{0})$ について，$y = 0$ (一定) より，$dy = 0$

$$\therefore \int_{O\to A}(0\cdot dx + 3x\cdot 0) = 0 \quad \cdots\cdots ⑤ \quad \text{となる。}$$

(ⅱ) $\displaystyle\int_{A\to B}(ydx + 3xdy)$ について，パラメータ (媒介変数) t を用いて，

$t : 0 \to 4$，$x = 4 - t$，$y = \dfrac{1}{2}t$ より，← $t : 0 \to 4$ のとき，$x : 4 \to 0$，$y : 0 \to 2$

$dx = -1\cdot dt$，$dy = \dfrac{1}{2}\cdot dt$ となる。よって，

$$\int_0^4 \left\{ \underbrace{\frac{1}{2}t}_{y} \cdot \underbrace{(-1)dt}_{dx} + 3\underbrace{(4-t)}_{x} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}dt}_{dy} \right\} = \int_0^4 \underbrace{(-2t+6)}_{-\frac{1}{2}t+6-\frac{3}{2}t}dt$$

$$= \left[-t^2 + 6t\right]_0^4 = -16 + 24 = 8 \quad \cdots\cdots ⑥ \quad \text{となる。}$$

(ⅲ) $\displaystyle\int_{B\to O}(y\underbrace{dx}_{0} + 3\underbrace{x}_{0}dy)$ について，$x = 0$(一定) より，$dx = 0$

$$\therefore \int_{B\to O}(y\cdot 0 + 3\cdot 0\cdot dy) = 0 \quad \cdots\cdots ⑦ \quad \text{となる。}$$

以上 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ) の⑤，⑥，⑦を④に代入すると，

$((*)$の右辺$) = 0 + 8 + 0 = 8$ ……⑧ となる。

以上 (Ⅰ), (Ⅱ) の③と⑧より，(∗) が成り立つことが確認された。……(終)