区分求積法の応用

絶対暗記問題 60 難易度 ★★ CHECK 1 CHECK 2 CHECK 3

$P_n = \left\{ \dfrac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdots\cdots(n+n)}{n^n} \right\}^{\frac{1}{n}}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ の極限

$\lim\limits_{n\to\infty} P_n$ を，次の問いに答えることにより求めよ。

(1) $\log P_n$ を $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ の形に変形せよ。(ただし，$\log P_n$ は P_n の自然対数を表す。)

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\log P_n$ を求めて，$\lim\limits_{n\to\infty} P_n$ を求めよ。

ヒント！ $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$ を直接求めるのは難しいので，(1)で P_n の自然対数をとって，これを変形すると，$\log P_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$の形に持ち込める。よって(2)で，区分求積法の公式を使って，$\lim\limits_{n\to\infty}\log P_n = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx$として，まず $\lim\limits_{n\to\infty}\log P_n$ を求め，これから $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$を求めよう。

解答＆解説

(1) $P_n = \left\{ \dfrac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdots\cdots(n+n)}{n^n} \right\}^{\frac{1}{n}}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ の両辺の自然対数をとって，変形すると，

$$\log P_n = \log\left\{ \frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdots\cdots(n+n)}{n^n} \right\}^{\boxed{\frac{1}{n}}}$$

対数の公式
- $\log x^{\boxed{n}} = n\cdot\log x$
- $\log xy = \log x + \log y$

$$= \frac{1}{n}\log\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{3}{n}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{n}\left\{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\log\left(1+\frac{2}{n}\right)+\log\left(1+\frac{3}{n}\right)+\cdots\cdots+\log\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}$$

$\therefore\ \log P_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\underbrace{\log\left(1+\dfrac{k}{n}\right)}$ ……① となる。 ……………………………(答)

$f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ の形になっている。

従って，$\log P_n$ の $n\to\infty$の極限は，$\lim\limits_{n\to\infty}\log P_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ となって，区分求積法の形が出来ているんだね。

(2) ①より，$\log P_n$ の $n\to\infty$ の極限を求めると，

$$\log P_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right) \cdots ①$$

$$\lim_{n\to\infty}\log P_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\log\left(1+\frac{k}{n}\right)}_{f\left(\frac{k}{n}\right)}$$

区分求積法

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$$

$$=\int_0^1\underbrace{\log(1+x)}_{f(x)}dx$$

$$=\int_0^1\underbrace{(1+x)'}_{1}\cdot\log(1+x)dx$$

部分積分

$$\int_0^1 f'\cdot g dx=[f\cdot g]_0^1-\int_0^1 f\cdot g' dx$$

$$=\left[(1+x)\cdot\log(1+x)\right]_0^1-\int_0^1\cancel{(1+x)}\cdot\underbrace{\{\log(1+x)\}'}_{\frac{1}{\cancel{1+x}}}dx$$

$$=2\cdot\log2-\cancel{1\cdot\underbrace{\log1}_{0}}-\underbrace{[x]_0^1}_{(1-0)=1}$$

対数の公式

$$\log\frac{y}{x}=\log y-\log x$$

$$=\underbrace{2\log2}_{\log2^2=\log4}-\underbrace{1}_{\log e}=\log4-\log e=\log\frac{4}{e} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{答})$$

$\log_e e=1$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\log P_n=\log\frac{4}{e}$ より，求める極限 $\lim_{n\to\infty}P_n$ の値は，

$\lim_{n\to\infty}P_n=\frac{4}{e}$ である。 ……………………………………………(答)

参考

$(x+a)\cdot\log(x+a)-x$ （a：定数）を x で微分すると，

$\{(x+a)\cdot\log(x+a)-x\}'=1\cdot\log(x+a)+\cancel{(x+a)}\cdot\frac{1}{\cancel{x+a}}-1=\log(x+a)$ となる。

よって，$\log(x+a)$ の不定積分の公式として，

$\int\log(x+a)dx=(x+a)\cdot\log(x+a)-x+C$ は覚えておくと便利だ。

これから，$\int_0^1\log(x+1)dx=\left[(x+1)\log(x+1)-x\right]_0^1$ と求めてもいいし，また，

$a=0$ のとき，$\int\log x dx=x\cdot\log x-x+C$ となる。これも覚えておこう！