● 2次元波動方程式を解くための準備をしよう。

では次，2次元波動方程式の解法についても解説しよう。ただし，その前段階として，“**2重フーリエサイン級数**”などの公式についても教えておく必要があるので，ここでまとめて解説しておこう。

まず，k, j を自然数とするとき，次の公式が成り立つことは大丈夫だね。

$$\int_0^L \sin\frac{k\pi}{L}x\cdot\sin\frac{j\pi}{L}x\,dx=\begin{cases}\dfrac{L}{2} & (k=j\text{ のとき})\\ 0 & (k\neq j\text{ のとき})\end{cases}\quad\cdots\cdots(*1)$$

この三角関数の性質が，2重フーリエサイン級数展開の基になるんだね。

この$(*1)$が成り立つことを確認しておこう。

公式：$\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

(i) $k=j$ のとき，

$$\int_0^L \sin\frac{k\pi}{L}x\cdot\sin\frac{\overset{k}{j}\pi}{L}x\,dx=\int_0^L \sin^2\frac{k\pi}{L}x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^L\left(1-\cos\frac{2k\pi}{L}x\right)dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{L}{2k\pi}\cancel{\sin\frac{2k\pi}{L}x}\right]_0^L=\frac{L}{2}$$

となる。

(ii) $k\neq j$ のとき，

$$\int_0^L \sin\frac{k\pi}{L}x\cdot\sin\frac{j\pi}{L}x\,dx=-\frac{1}{2}\int_0^L\left\{\cos\frac{(k+j)\pi}{L}x-\cos\frac{(k-j)\pi}{L}x\right\}dx$$

$$\| \quad -\frac{1}{2}\left\{\cos\left(\frac{k\pi}{L}x+\frac{j\pi}{L}x\right)-\cos\left(\frac{k\pi}{L}x-\frac{j\pi}{L}x\right)\right\}$$

公式：$\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{L}{(k+j)\pi}\cancel{\sin\frac{(k+j)\pi}{L}x}-\frac{L}{(k-j)\pi}\cancel{\sin\frac{(k-j)\pi}{L}x}\right]_0^L=0\text{ となる。}$$

以上(i)(ii)より，$(*1)$が成り立つことが示せたんだね。

そして，この$(*1)$の公式を利用することにより，次の“**2重フーリエサイン級数**”の展開公式を導くことができるんだね。

● 2重フーリエサイン級数展開もマスターしよう！

それでは次，2変数関数 $f(x,\ y)$ のフーリエサイン級数展開についても解説しよう。今回は，$0 \leqq x \leqq L_1$，$0 \leqq y \leqq L_2$ の範囲で定義された区分的に滑らかな2変数関数 $f(x,\ y)$ を三角関数 $\sin\dfrac{k\pi}{L_1}x$ と $\sin\dfrac{j\pi}{L_2}y$ $(k,\ j$：自然数$)$ の積の無限級数で展開することにする。これを“**2重フーリエサイン級数**”(*double Fourier sine series*) と呼ぶ。

2重フーリエサイン級数

$0 \leqq x \leqq L_1$，$0 \leqq y \leqq L_2$ の範囲で区分的に滑らかな2変数関数 $f(x,\ y)$ は次のように2重フーリエサイン級数 (2重フーリエ正弦級数) に展開できる。

$$f(x,\ y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_{kj}\sin\frac{k\pi}{L_1}x\cdot\sin\frac{j\pi}{L_2}y \quad \cdots\cdots(*2)$$

ただし，$b_{kj} = \dfrac{4}{L_1L_2}\displaystyle\int_0^{L_1}\!\!\int_0^{L_2} f(x,\ y)\sin\frac{k\pi}{L_1}x\cdot\sin\frac{j\pi}{L_2}y\,dxdy \quad \cdots\cdots(*2)'$

$(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ j=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

1変数関数 $f(x)$ のフーリエサイン級数のときと形式的には同様なので，覚えやすいと思う。それでは，$f(x,\ y)$ が $(*2)$ の右辺のようにフーリエサイン級数に展開されるとき，その係数 b_{kj} $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ j=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が $(*2)'$ により求められることを示しておこう。

$$f(x,\ y) = \sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{\infty} b_{kj}\sin\frac{j\pi}{L_2}y\right)}_{c_k(y)}\sin\frac{k\pi}{L_1}x \quad \cdots\cdots(*2)\text{ から，}$$

$$c_k(y) = \sum_{j=1}^{\infty} b_{kj}\sin\frac{j\pi}{L_2}y \quad \cdots\cdots①\text{とおくと，}$$

①の右辺は $j=1,\ 2,\ \cdots\cdots$ としてその無限級数をとるので，結局 k と y の式になる。よって，これを $c_k(y)$ とおいた。

$(*2)$ は，$f(x,\ y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} c_k(y)\sin\frac{k\pi}{L_1}x$ ……②となる。ここで，公式：

$$\int_0^L \sin\frac{k\pi}{L}x\cdot\sin\frac{j\pi}{L}x\,dx = \begin{cases}\dfrac{L}{2} & (k=j)\\ 0 & (k\neq j)\end{cases} \quad \cdots\cdots(*1)\text{ を用いると，}$$

P197

(i) ①の両辺に $\sin\frac{j\pi}{L_2}y$ をかけて，積分区間 $0 \leqq y \leqq L_2$ で y により積分すると，

$$\int_0^{L_2} c_k(y)\sin\frac{j\pi}{L_2}y\,dy$$

$$=\int_0^{L_2}\sin\frac{j\pi}{L_2}y\left(b_{k1}\sin\frac{\pi}{L_2}y+b_{k2}\sin\frac{2\pi}{L_2}y+\cdots+b_{kj}\sin\frac{j\pi}{L_2}y+\cdots\right)dy$$

$$=b_{kj}\underbrace{\int_0^{L_2}\sin^2\frac{j\pi}{L_2}y\,dy}_{\boxed{\frac{L_2}{2}}}=\frac{L_2}{2}b_{kj}\ \text{となる。}$$

公式 ($*$1) を用いた。

$$\therefore\ b_{kj}=\frac{2}{L_2}\int_0^{L_2}c_k(y)\sin\frac{j\pi}{L_2}y\,dy\ \cdots\cdots③$$

(ii) ②の両辺に $\sin\frac{k\pi}{L_1}x$ をかけて，積分区間 $0 \leqq x \leqq L_1$ で x により積分すると，

$$\int_0^{L_1} f(x,\ y)\sin\frac{k\pi}{L_1}x\,dx$$

$$=\int_0^{L_1}\sin\frac{k\pi}{L_1}x\left\{c_1(y)\sin\frac{\pi}{L_1}x+c_2(y)\sin\frac{2\pi}{L_1}x+\cdots+c_k(y)\sin\frac{k\pi}{L_1}x+\cdots\right\}dx$$

$$=c_k(y)\underbrace{\int_0^{L_1}\sin^2\frac{k\pi}{L_1}x\,dx}_{\boxed{\frac{L_1}{2}}}=\frac{L_1}{2}c_k(y)\ \text{となる。}$$

公式 ($*$1) を用いた。

$$\therefore\ c_k(y)=\frac{2}{L_1}\int_0^{L_1}f(x,\ y)\sin\frac{k\pi}{L_1}x\,dx\ \cdots\cdots④$$

以上 (i)(ii) より，④を③に代入すると，次のように b_{kj} を求める ($*$2)′ の公式が導けるんだね。

$$b_{kj}=\frac{2}{L_2}\int_0^{L_2}\left(\frac{2}{L_1}\int_0^{L_1}f(x,\ y)\sin\frac{k\pi}{L_1}x\,dx\right)\sin\frac{j\pi}{L_2}y\,dy$$

$$=\frac{4}{L_1L_2}\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}f(x,\ y)\sin\frac{k\pi}{L_1}x\cdot\sin\frac{j\pi}{L_2}y\,dxdy\ \cdots\cdots(*2)'$$

この 2 重フーリエサイン級数の展開公式：

$$u = f(x,\ y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_{kj}\sin\frac{k\pi}{L_1}x\cdot\sin\frac{j\pi}{L_2}y \quad \cdots\cdots(*2)$$

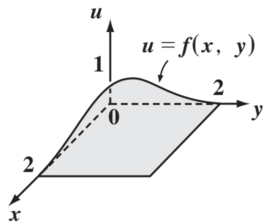
$$\left(b_{kj} = \frac{4}{L_1L_2}\int_0^{L_1}\int_0^{L_2} f(x,\ y)\sin\frac{k\pi}{L_1}x\cdot\sin\frac{j\pi}{L_2}y\,dxdy \quad \cdots\cdots(*2)'\right)$$

により，xyu 座標空間上の曲面 $u = f(x,\ y)$ $(0 \leqq x \leqq L_1,\ 0 \leqq y \leqq L_2)$ を 2 重フーリエサイン級数で展開できることになったんだね。

では，次の例題で早速練習してみよう。

例題 24 $0 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq 2$ で定義される次の 2 変数関数 $u = f(x,\ y)$ を 2 重フーリエサイン級数に展開してみよう。

$$f(x,\ y) = \frac{1}{32}x(2-x)y(2-y) \quad \cdots\cdots①$$



$0 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq 2$ で定義された 2 変数関数 $f(x,\ y)$ …①は，(区分的に) 滑らかな関数なので，公式 $(*2)$，$(*2)'$ を用いて次のように 2 重フーリエサイン級数に展開できる。

$$f(x,\ y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_{kj}\sin\frac{k\pi}{2}x\cdot\sin\frac{j\pi}{2}y \quad \cdots\cdots②$$

$$b_{kj} = \underbrace{\frac{4}{2\cdot 2}}_{1}\int_0^2\int_0^2 \underbrace{f(x,\ y)}_{\frac{1}{32}(2x-x^2)(2y-y^2)\ (①より)}\sin\frac{k\pi}{2}x\cdot\sin\frac{j\pi}{2}y\,dxdy \quad \cdots\cdots③$$

$L_1 = L_2 = 2$ を $(*2)$，$(*2)'$ に代入したもの

ここで，③に①を代入してまとめると，

$$b_{kj} = \int_0^2\int_0^2 \frac{1}{32}(2x-x^2)(2y-y^2)\sin\frac{k\pi}{2}x\cdot\sin\frac{j\pi}{2}y\,dxdy$$

$$= \frac{1}{32}\underbrace{\int_0^2 (2x-x^2)\sin\frac{k\pi}{2}x\,dx}_{これを\lambda_k とおく}\cdot\underbrace{\int_0^2 (2y-y^2)\sin\frac{j\pi}{2}y\,dy}_{これを\lambda_j とおく} \quad \cdots\cdots④$$

ここで，④の右辺の2つの定積分をそれぞれ

$$\begin{cases} \lambda_k = \int_0^2 (2x - x^2)\sin\frac{k\pi}{2}x\,dx & \cdots\cdots⑤ \\ \lambda_j = \int_0^2 (2y - y^2)\sin\frac{j\pi}{2}y\,dy & \cdots\cdots⑤' \end{cases}$$

⑤と⑤′は，積分変数が x と y で異なっても，同じ積分で k と j のみが異なるので，それぞれ λ_k，λ_j とおいた。

とおくことにしよう。⑤，⑤′は本質的に同じ積分なので，⑤のみを求めれば，その結果の k に j を代入したものが，⑤′の積分結果になるんだね。

では，⑤の定積分を，部分積分法を用いて求めてみよう。

$$\lambda_k = \int_0^2 (2x - x^2)\left(-\frac{2}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2}x\right)'dx$$

部分積分法
$$\int_0^2 f\cdot g'dx = [f\cdot g]_0^2 - \int_0^2 f'\cdot g\,dx$$

$$= \cancel{-\frac{2}{k\pi}\left[(2x - x^2)\cos\frac{k\pi}{2}x\right]_0^2} + \frac{2}{k\pi}\int_0^2 (2 - 2x)\cos\frac{k\pi}{2}x\,dx$$

$$= \frac{4}{k\pi}\int_0^2 (1 - x)\cdot\left(\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}x\right)'dx$$

部分積分法の2連発！
$$\int_0^2 f\cdot g'dx = [f\cdot g]_0^2 - \int_0^2 f'\cdot g\,dx$$

$$= \cancel{\frac{8}{k^2\pi^2}\left[(1 - x)\sin\frac{k\pi}{2}x\right]_0^2} - \frac{8}{k^2\pi^2}\int_0^2 (-1)\sin\frac{k\pi}{2}x\,dx$$

$\because \sin\frac{k\pi}{2}\cdot 2 = \sin k\pi = 0$
$\sin 0 = 0$

$$= \frac{8}{k^2\pi^2}\int_0^2 \sin\frac{k\pi}{2}x\,dx = \frac{8}{k^2\pi^2}\left(-\frac{2}{k\pi}\right)\left[\cos\frac{k\pi}{2}x\right]_0^2$$

$$= -\frac{16}{k^3\pi^3}(\underbrace{\cos k\pi}_{(-1)^k} - \underbrace{\cos 0}_{1}) = \frac{16\{1 - (-1)^k\}}{\pi^3 k^3} \quad \cdots\cdots⑥$$ となる。

λ_k の k に j を代入したものが λ_j となる。

同様の計算をして，⑤′の積分は

$$\lambda_j = \frac{16\{1 - (-1)^j\}}{\pi^3 j^3} \quad \cdots\cdots⑥'$$ となる。

⑥，⑥´ を④に代入すると，

$$b_{kj} = \frac{1}{32} \times \frac{16\{1-(-1)^k\}}{\pi^3 k^3} \times \frac{16\{1-(-1)^j\}}{\pi^3 j^3}$$

$$\therefore\ b_{kj} = \frac{8}{\pi^6} \cdot \frac{1-(-1)^k}{k^3} \cdot \frac{1-(-1)^j}{j^3} \quad \cdots\cdots⑦$$

$$f(x,\ y) = \frac{1}{32}(2x-x^2)(2y-y^2) \quad \cdots\cdots①$$

$$f(x,\ y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_{kj}\sin\frac{k\pi}{2}x \cdot \sin\frac{j\pi}{2}y \quad \cdots②$$

$$b_{kj} = \frac{1}{32}\lambda_k \cdot \lambda_j \quad \cdots\cdots④$$

$$\lambda_k = \frac{16\{1-(-1)^k\}}{\pi^3 k^3} \quad \cdots\cdots⑥$$

$$\lambda_j = \frac{16\{1-(-1)^j\}}{\pi^3 j^3} \quad \cdots\cdots⑥'$$

となる。この⑦を②に代入することにより，$f(x,\ y)$ …①の **2** 重フーリエサイン級数展開が次のように求まるんだね。納得いった？

$$f(x,\ y) = \frac{8}{\pi^6}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^k}{k^3} \cdot \frac{1-(-1)^j}{j^3} \sin\frac{k\pi}{2}x \cdot \sin\frac{j\pi}{2}y \quad \cdots\cdots⑧$$

● 2 次元波動方程式にチャレンジしよう！

以上で準備も整ったので，いよいよ，**2** 次元波動方程式：

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$ を，次の例題で解いてみることにしよう。

例題 25　関数 $u(x,\ y,\ t)$ について，次の **2** 次元波動方程式を解いてみよう。

$$\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{a^2=1\text{ の場合だ。}} \quad \cdots\cdots(a) \quad (0 < x < 2,\ 0 < y < 2,\ 0 < t)$$

例題 **24** の①の関数だ。　$t=0$ で，静止状態からスタートだ。

初期条件：$u(x,\ y,\ 0) = \dfrac{1}{32}(2x-x^2)(2y-y^2)$，$u_t(x,\ y,\ 0) = 0$

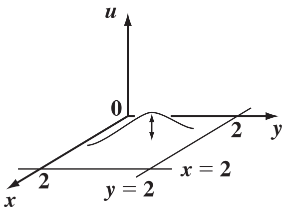
境界条件：$u(0,\ y,\ t) = u(2,\ y,\ t) = u(x,\ 0,\ t) = u(x,\ 2,\ t) = 0$

与えられた条件より，図(ア)に示すように **4** 頂点 $(0,\ 0,\ 0)$，$(2,\ 0,\ 0)$，$(2,\ 2,\ 0)$，$(0,\ 2,\ 0)$ からなる正方形の **4** 辺で固定された正方形の膜の振動問題になるんだね。

変数分離法により，

$u(x,\ y,\ t) = X(x) \cdot Y(y) \cdot T(t)$ ……(b)

図(ア)



とおけるものとする。(b)を(a)に代入して，

$X\cdot Y\cdot\ddot{T}=X''YT+XY''T$ となる。この両辺を XYT で割ると，

$$\underbrace{\frac{\ddot{T}}{T}}_{t\text{のみの式}}=\underbrace{\frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}}_{x\text{と}y\text{のみの式}}\quad\cdots\cdots(\mathrm{c})$$ となる。

(c)の左辺は t のみ，右辺は x と y のみの式なので，この等式が恒等的に成り立つためには，これはある定数 α と等しくなければならない。

ここで，$\alpha\geqq 0$ は不適である。

よって，$\alpha<0$ より，

$\alpha=-\omega^2\ (\omega>0)$ とおくと，(c)は，

$$\frac{\ddot{T}}{T}=\underbrace{\frac{X''}{X}}_{\text{新たに}-\omega_1{}^2}+\underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{-\omega_2{}^2\text{とおく。}}=-\omega^2\quad\cdots\cdots(\mathrm{c})'$$

ここで新たに，$\dfrac{X''}{X}=-\omega_1{}^2$，$\dfrac{Y''}{Y}=-\omega_2{}^2$

$(\omega_1{}^2+\omega_2{}^2=\omega^2)$ とおくと，

(c)′ より，次の 3 つの常微分方程式が導かれるんだね。

(i) $X''=-\omega_1{}^2X$ …(d)

(ii) $Y''=-\omega_2{}^2Y$ …(e)

(iii) $\ddot{T}=-\omega^2T$ …(f)

・$\alpha>0$ のとき

$\dfrac{X''}{X}=\alpha_1$，$\dfrac{Y''}{Y}=\alpha_2$　$(\alpha_1+\alpha_2=\underset{\oplus}{\alpha})$

とおくと，α_1 と α_2 のいずれか一方は必ず正となる。今，$\alpha_1>0$ とすると，

$X''=\alpha_1X\ (\alpha_1>0)$ より，

特性方程式：$\lambda^2-\alpha_1=0$，$\lambda=\pm\sqrt{\alpha_1}$

$\therefore X(x)=A_1e^{\sqrt{\alpha_1}x}+A_2e^{-\sqrt{\alpha_1}x}$

となる。ここで，境界条件：

$u(0,\ y,\ t)=u(2,\ y,\ t)=0$ より，

$A_1=A_2=0$ となって，不適。

$\alpha_2>0$ のときも同様に不適。

・$\alpha=0$ のとき

$\alpha_1=\alpha_2=0$ の場合も考えられる。

このとき，$X''=0$ より，$X(x)=px+q$

同様に境界条件より，$p=q=0$ ∴不適。

(i) $X''=-\omega_1{}^2X$ …(d)は，単振動の微分方程式より，その解は，

$X(x)=\cancel{A_1\cos\omega_1x}+A_2\sin\omega_1x$ だね。

境界条件：$u(0,\ y,\ t)=u(2,\ y,\ t)=0$

より，$X(0)=A_1=0$，$X(2)=A_2\sin\underbrace{2\omega_1}_{k\pi}=0$

$\underbrace{u(0,\ y,\ t)}_{X(0)Y(y)T(t)}=\underbrace{u(2,\ y,\ t)}_{X(2)Y(y)T(t)}=0$

より，$X(0)=X(2)=0$ となる。

よって，$A_1=0$，$\omega_1=\dfrac{k\pi}{2}\quad(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ となる。

$\therefore X(x)=A_2\sin\dfrac{k\pi}{2}x\quad\cdots\cdots(\mathrm{g})$ となるんだね。大丈夫？

(ii) $Y'' = -\omega_2{}^2 Y$ ……(e) も単振動の微分方程式より，その解は

$Y(y) = \cancel{B_1\cos\omega_2 y} + B_2\sin\omega_2 y$ となる。

境界条件：$u(x,\ 0,\ t) = u(x,\ 2,\ t) = 0$

より，$Y(0) = B_1 = 0$，$Y(2) = B_2\sin\underbrace{2\omega_2}_{j\pi} = 0$

$\underbrace{u(x,\ 0,\ t)}_{X(x)Y(0)T(t)} = \underbrace{u(x,\ 2,\ t)}_{X(x)Y(2)T(t)} = 0$

より，$Y(0) = Y(2) = 0$ だね。

よって，$B_1 = 0$，$\omega_2 = \dfrac{j\pi}{2}$ $(j = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$\therefore\ Y(y) = B_2\sin\dfrac{j\pi}{2}y$ ……(h) となるんだね。

(iii) $\ddot{T} = -\omega^2 T$ ……(f) も単振動の微分方程式より，その解は，

$T(t) = C_1\cos\omega t + \cancel{C_2\sin\omega t}$ ……(i) となる。これを t で微分して，

$\dot{T}(t) = -C_1\omega\sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t$

$\dot{T}(0) = C_2\omega = 0$

初期条件：

$\underbrace{u_t(x,\ y,\ 0)}_{X(x)Y(y)\dot{T}(0)} = 0$ より，

$\dot{T}(0) = 0$ だね。

よって，$C_2 = 0$ $(\because\ \omega > 0)$

また，(i)(ii) の結果より，

$$\omega^2 = \underbrace{\omega_1{}^2}_{\left(\frac{k\pi}{2}\right)^2} + \underbrace{\omega_2{}^2}_{\left(\frac{j\pi}{2}\right)^2} = \frac{k^2 + j^2}{4}\pi^2$$

$$\therefore\ \omega = \frac{\sqrt{k^2 + j^2}}{2}\pi$$

よって，(i) は，

$$T(t) = C_1\cos\frac{\sqrt{k^2 + j^2}}{2}\pi t \quad \cdots\cdots(\mathrm{j})$$

以上 (i) $X(x) = A_2\sin\dfrac{k\pi}{2}x$ ……(g)，(ii) $Y(y) = B_2\sin\dfrac{j\pi}{2}y$ ……(h)

(iii) $T(t) = C_1\cos\dfrac{\sqrt{k^2 + j^2}}{2}\pi t$ ……(j) より，

(a) の微分方程式の独立解 $u_{kj}(x,\ y,\ t)$ は，

$$u_{kj}(x,\ y,\ t) = b_{kj}\sin\frac{k\pi}{2}x \cdot \sin\frac{j\pi}{2}y \cdot \cos\frac{\sqrt{k^2 + j^2}}{2}\pi t \quad \cdots\cdots(\mathrm{k})$$

$(k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ \ j = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ となるんだね。

そして，この(k)を **2** 重に重ね合わせた **2** 重フーリエサイン級数を $u(x,\ y,\ t)$ とおくと，これもまた(a)の解となる。よって，

$$u(x,\ y,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}b_{kj}\sin\frac{k\pi}{2}x\cdot\sin\frac{j\pi}{2}y\cdot\cos\frac{\sqrt{k^2+j^2}}{2}\pi t\ \cdots\cdots(1)$$

ここで，$t=0$ のとき，(1)は，

$$u(x,\ y,\ 0)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}b_{kj}\sin\frac{k\pi}{2}x\cdot\sin\frac{j\pi}{2}y\cdot\underbrace{\cos\frac{\sqrt{k^2+j^2}}{2}\pi\cdot 0}_{\cos 0=1}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}b_{kj}\sin\frac{k\pi}{2}x\cdot\sin\frac{j\pi}{2}y\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)'$$

ここで初期条件：

$$u(x,\ y,\ 0)=\frac{1}{32}(2x-x^2)(2y-y^2)$$

より，(1)′の係数 b_{kj} は，**2** 重フーリエサイン級数の公式 ($*$**2**)′ より，

> **2** 重フーリエサイン級数の公式 (**P198**)
>
> $$f(x,\ y)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}b_{kj}\sin\frac{k\pi}{L_1}x\cdot\sin\frac{j\pi}{L_2}y\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*2)$$
>
> $$b_{kj}=\frac{4}{L_1L_2}\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}f(x,\ y)\sin\frac{k\pi}{L_1}x\cdot\sin\frac{j\pi}{L_2}y\,dxdy\ \cdots(*2)'$$

今回は $L_1=L_2=2$
$u(x,\ y,\ 0)=f(x,\ y)$
として

$$b_{kj}=\underbrace{\frac{4}{2\cdot 2}}_{1}\int_0^2\int_0^2\underbrace{u(x,\ y,\ 0)}_{\frac{1}{32}(2x-x^2)(2y-y^2)}\sin\frac{k\pi}{2}x\cdot\sin\frac{j\pi}{2}y\,dxdy$$

$$=\frac{1}{32}\underbrace{\int_0^2(2x-x^2)\sin\frac{k\pi}{2}x\,dx}_{\lambda_k=\frac{16\{1-(-1)^k\}}{\pi^3k^3}}\cdot\underbrace{\int_0^2(2y-y^2)\sin\frac{j\pi}{2}y\,dy}_{\lambda_j=\frac{16\{1-(-1)^j\}}{\pi^3j^3}}$$

これは，例題 **24**(**P200**) で既に求めたね。

$$\therefore\ b_{kj}=\frac{8}{\pi^6}\cdot\frac{1-(-1)^k}{k^3}\cdot\frac{1-(-1)^j}{j^3}\ \cdots\cdots(m)$$

(m)を(1)に代入すると，(a)の **2** 次元振動の方程式の解 $u(x,\ y,\ t)$ が，

$$u(x,\ y,\ t)=\frac{8}{\pi^6}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k^3}\cdot\frac{1-(-1)^j}{j^3}\cdot\sin\frac{k\pi}{2}x\cdot\sin\frac{j\pi}{2}y\cdot\cos\frac{\sqrt{k^2+j^2}}{2}\pi t$$

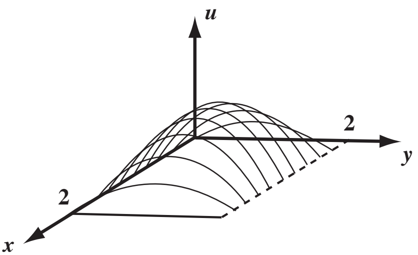
と求まるんだね。

ここで，この正方形の**2**次元振動膜の振動運動の様子を実際に調べてみよう。もちろん，**2**重の無限級数$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\right)$なんて求めることはできないけれど，それぞれ初めの**15**項ずつとったものを，この解の近似値として，つまり，

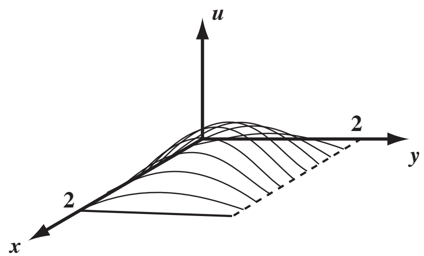
$$u(x,\ y,\ t) \fallingdotseq \frac{8}{\pi^6}\sum_{k=1}^{15}\sum_{j=1}^{15}\frac{1-(-1)^k}{k^3}\cdot\frac{1-(-1)^j}{j^3}\cdot\sin\frac{k\pi}{2}x\cdot\sin\frac{j\pi}{2}y\cdot\cos\frac{\sqrt{k^2+j^2}}{2}\pi t$$

として，$t=0$，**0.4**，**0.8**，**1.2**，**1.6**，**2**，**2.4**，**2.8**のときの振動膜の様子を図(ⅰ)～(ⅷ)に示す。ただし，振動の様子を見やすくするために，u軸方向の変位は誇張して大きく示している。本当は，微小な変位の振動なんだね。

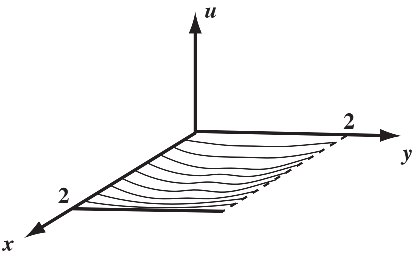
(ⅰ) $t=0$



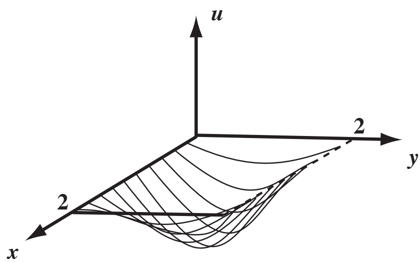
(ⅱ) $t=0.4$



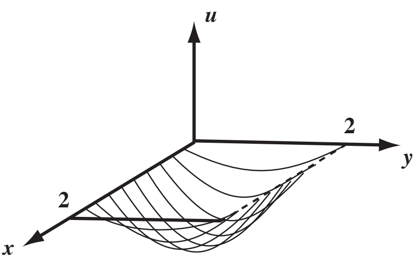
(ⅲ) $t=0.8$ のとき



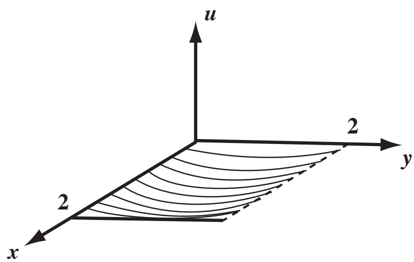
(ⅳ) $t=1.2$ のとき



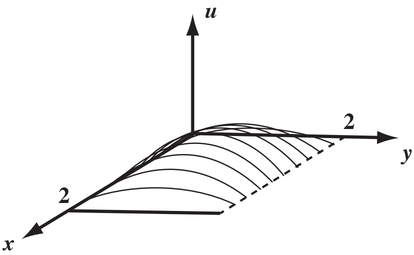
(ⅴ) $t=1.6$ のとき



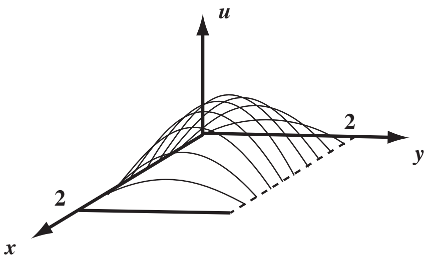
(ⅵ) $t=2$ のとき



(vii) $t = 2.4$ のとき



(viii) $t = 2.8$ のとき



どう? **1** 辺の長さ **2** の正方形の膜が振動している様子が見事に描き出されているね。計算は結構大変だったけれど,興味をもって頂けたと思う。

以上で,**「フーリエ解析キャンパス・ゼミ 改訂1」**の講義はすべて終了です。ここまで読み進んでくるのは大変だったと思う。でも様々な理論的な解説も入れてはきたけれど,たくさんの具体的な問題を,グラフを使って詳しく解説してきたから,ご理解頂けたと思う。

このフーリエ解析は数学と物理学の接点になっており,いずれの面から見ても面白く,実り豊かな分野になっているんだね。だから大変だったけれど,楽しみも大きかったはずだ。

“フーリエ解析”は内容が豊富なため,まだまだみなさん達が学ぶべき重要な分野がたく山残っている。これまで解説した,三角関数による直交関数系以外にも直交関数系があり,これらが,円形の境界条件や,球面上の境界条件の問題を解く上で,重要な働きを演ずるんだ。

これらの内容については**「偏微分方程式キャンパス・ゼミ」**で,また楽しく親切に解説しているので,是非これで勉強して頂きたい。でも,先を急ぐことはない。まずその前に,この**「フーリエ解析キャンパス・ゼミ 改訂1」**をよく復習して,シッカリマスターすることだ。ステップ・バイ・ステップに実力を伸ばしていくことが理想だからね。

それでは,次の講義でまた会おう! それまでみなさん,お元気で…。

マセマ代表　馬場 敬之(けいし)
高杉 豊