(ⅱ) について，

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}\left\{\underbrace{\frac{1}{2}m}(\underbrace{\dot{r}^2} + \underbrace{r^2}\dot{\theta}^2) + \underbrace{\cancel{\frac{GMm}{r}}}_{\text{定数扱い}}\right\} = \frac{1}{2}m \cdot r^2 \cdot 2\dot{\theta} = mr^2\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left\{\underbrace{\cancel{\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{GMm}{r}}}_{\text{すべて定数扱い}}\right\} = 0$$

以上を⑦に代入して，

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) - 0 = 0 \qquad \underbrace{m}_{\text{定数}}\underbrace{\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})}_{2r\dot{r}\dot{\theta}+r^2\ddot{\theta}} = 0 \quad \text{より，}$$

$m(2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}) = 0$　　両辺を r (>0) で割って，

$m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0$　となり，

$ma_\theta = 0$　……④　と同じ方程式が導けた！(P254)　面白かった？

● ハミルトンの正準方程式も紹介しよう！

では次に，さらに洗練された“**ハミルトンの正準方程式**”(*Hamilton's canonical equation*) についても，解説しよう。

ハミルトンの正準方程式

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \;\cdots\cdots(*3),\qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \;\cdots\cdots(*3)' \quad (i = 1, 2, \cdots, f)$$

(ただし，H：ハミルトニアン，q_i：一般化座標，t：時刻，f：自由度

p_i：一般化運動量，　$p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ ……(＊4)　(L：ラグランジアン)

$H = \displaystyle\sum_{i=1}^{f} p_i\dot{q}_i - L$ ……(＊5))

このように，ハミルトンの正準方程式は，(＊3) と (＊3)′ の 2 つが対になって表されるんだね。ここで，q_i は一般化座標，また p_i は一般化運動量で，p_i は (＊4) により定義される。つまり，ハミルトニアン H を求める手順は，(ⅰ) まず，ラグランジアン L を求める。(ⅱ) 次に，$p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ により，一般化

運動量 p_i を求め，(iii) 最後に，$H=\sum_{i=1}^{f}p_i\dot{q}_i-L$ により，ハミルトニアン H を求めるんだね。しかし，ある条件は付くんだけれど，ハミルトニアン H は，多くの例題で $H=T+U$ ……(∗5)′ (T：運動エネルギー，U：ポテンシャルエネルギー) となる，すなわち，H は，全力学的エネルギー E と一致するんだね。これは，$L=T-U$ と対比して覚えておこう。もちろん，正確に H を求めるためには，上記の (i), (ii), (iii) の手順に従えばいいんだね。

ここで，H は，q_i と $\dot{q}_i (i=1, 2, \cdots, f)$ で表されるけれど，$\dot{q}_i$ を一般化運動量 p_i で表すことにして，H は，q_i と $p_i (i=1, 2, \cdots, f)$ の関数，すなわち，$H=H(q_1, q_2, \cdots, q_f, p_1, p_2, \cdots, p_f)$ と表すことにする。この 2 種類の独立変数 q_i と p_i を正準(せいじゅん)変数と呼ぶことも覚えておこう。つまり，正準方程式とは，$2f$ 個の正準変数 $q_1, q_2, \cdots, q_f, p_1, p_2, \cdots, p_f$ と，$2f$ 個の対になった方程式

$$\frac{dq_1}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_1} \text{ と } \frac{dp_1}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_1},\quad \frac{dq_2}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_2} \text{ と } \frac{dp_2}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_2},\ \cdots\cdots,$$

$$\frac{dq_f}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_f} \text{ と } \frac{dp_f}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_f}$$

から構成されているんだね。大丈夫?

ここで，正準方程式(∗3)と(∗3)′の覚え方も教えよう。これは "ヘクトパスカル"，つまり，"へ(H)ク(q)ト(t)パ(p)スカル" と覚えるといい。

まず，右上に起点となるH(へ)の位置を固定し，"d" や "∂" や "$_i$" などを取り払うと，(∗3)では "へ(H)ク(q)ト(t)パ(p)スカル" の順に反時計回り(⊕回り)に文字が並ぶので，そのままとする。これに対して，(∗3)′では，時計回り(⊖回り)に同じ文字が並ぶので，右辺に⊖を付けると覚えておけばいいんだね。下の図を見ながら，シッカリ頭に入れて頂きたい。

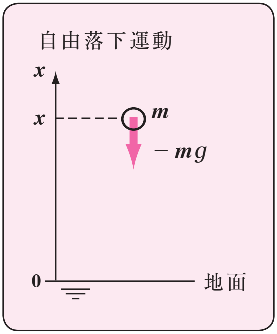
図 4　ハミルトンの正準方程式の覚え方

(i) (∗3) の方程式　　(ii) (∗3)′ の方程式

以上で，ハミルトンの正準方程式についての基本の解説は終了です。この正準方程式も，ラグランジュの運動方程式と同様に，ニュートンの運動方程式と等価なんだね。したがって，これから，自由落下運動と放物運動を例にとって，ハミルトンの正準方程式から，ニュートンの運動方程式が導けることを示しておこう。

● 自由落下運動を調べてみよう！

右図に示すように，**P251** で解説した自由落下運動と同じ例題を使うことにする。



この自由度 f は $f=1$ なので，ニュートンの運動方程式は

$$m\ddot{x} = -mg \quad \cdots\cdots ①$$

1つの方程式

となるのは大丈夫だね。

では，これをハミルトンの正準方程式で下に表そう。

$$\begin{cases} (\text{i}) \ \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_x} & \cdots\cdots\cdots ② \\ (\text{ii}) \ \dfrac{dp_x}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

$f=1$ より，正準方程式
$\dfrac{dq_1}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_1}$，$\dfrac{dp_1}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_1}$
の $q_1 = x$，$p_1 = p_x$ とおいた。

まず，運動量 $p_x = m\dot{x}$ より，$\dot{x} = \dfrac{p_x}{m}$ ……④

また，ハミルトニアン $H = T + U = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx$ ……⑤ より，

⑤に④を代入して，

$$H = \frac{1}{2}m\left(\frac{p_x}{m}\right)^2 + mgx \quad \text{より}$$

$$H = \frac{p_x^{\,2}}{2m} + mgx \quad \cdots\cdots ⑤' \ \text{となる。}$$

H は，q_1 と p_1，すなわち x と p_x の式で表す。

これで，準備が整ったので，後は⑤′を②と③に代入するだけだ。

(i) ⑤´ を②に代入して，

$$\dot{x}=\frac{\partial}{\partial p_x}\left(\underbrace{\frac{1}{2m}}_{\text{定数扱い}}p_x^{\,2}+\cancel{mgx}\right)=\frac{1}{2m}\cdot 2p_x=\frac{p_x}{m}$$ となる。

これは，④と同じ運動量の式だ！

(ii) ⑤´ を③に代入して，

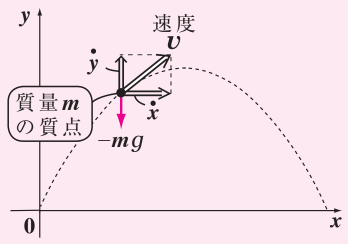
$$\underbrace{\dot{p}_x}_{=\frac{d}{dt}(m\dot{x})=m\ddot{x}}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\underbrace{\frac{1}{2m}p_x^{\,2}}_{\text{定数扱い}}+\underline{mgx}\right)=-mg$$ となる。

これから，$m\ddot{x}=-mg$ となって，①のニュートンの運動方程式が導けた。この例題を解いて，(i) の $\frac{dx}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_x}$ ……②から，運動量の式が出てくるだけだから②は不要で，(ii) の $\frac{dp_x}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x}$ ……③だけでいいんじゃないかと，思っておられる方がほとんどだと思う。ここでは，詳しくは解説できないけれど，現時点では，ハミルトンの正準方程式は，正準変数 q_i，p_i と共に，②と③のペアで 1 つの意味をなしていると考えて頂きたい。

● 放物運動も調べてみよう！

右図に示すように，P252 で解説した放物運動と同じ例題をここでも使うことにしよう。

空気抵抗がない場合の放物運動



この自由度 f は $f=2$ なので，ニュートンの運動方程式は，

2 つの方程式

$$\begin{cases} m\ddot{x}=0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(a)} \\ m\ddot{y}=-mg & \cdots\cdots\text{(b)} \end{cases}$$

となるのはいいね。では，これをハミルトンの正準方程式で表すと，次のようになる。

$$\begin{cases} \text{(i)}\ \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\partial H}{\partial p_x} & \cdots\cdots\cdots\text{(c)} \\ \text{(ii)}\ \dfrac{dp_x}{dt}=-\dfrac{\partial H}{\partial x} & \cdots\cdots\text{(d)} \end{cases}\qquad \begin{cases} \text{(iii)}\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{\partial H}{\partial p_y} & \cdots\cdots\cdots\text{(e)} \\ \text{(iv)}\ \dfrac{dp_y}{dt}=-\dfrac{\partial H}{\partial y} & \cdots\cdots\text{(f)} \end{cases}$$

$q_1=x$，$q_2=y$
$p_1=p_x$，$p_2=p_y$ として 2 組の正準方程式が導ける。

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(a)} \\ m\ddot{y} = -mg & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(b)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{(i)} & \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_x} & \cdots\cdots\cdots\text{(c)} \\ \text{(ii)} & \dfrac{dp_x}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} & \cdots\cdots\text{(d)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{(iii)} & \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_y} & \cdots\cdots\cdots\text{(e)} \\ \text{(iv)} & \dfrac{dp_y}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial y} & \cdots\cdots\text{(f)} \end{cases}$$

まず，運動量 $p_x = m\dot{x}$，$p_y = m\dot{y}$ より

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m} \quad \cdots\cdots\text{(g)} \qquad \dot{y} = \frac{p_y}{m} \quad \cdots\cdots\text{(h)}$$

また，ハミルトニアン H は，

$$H = T + U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy \quad \cdots\cdots\text{(i)}$$

(i)に(g)と(h)を代入して，H を x，y，p_x，p_y の正準変数で表すと，

$$H = \frac{m}{2}\left(\frac{p_x{}^2}{m^2} + \frac{p_y{}^2}{m^2}\right) + mgy \qquad \therefore\ H = \frac{1}{2m}(p_x{}^2 + p_y{}^2) + mgy \quad \cdots\cdots\text{(i)}'$$

これで，準備が整ったので，(i)′を(c)，(d)，(e)，(f)に代入しよう。

(i) (i)′を(c)に代入して，

$$\dot{x} = \frac{\partial}{\partial p_x}\left\{\frac{1}{\underbrace{2m}_{\text{定数扱い}}}(p_x{}^2 + \underbrace{p_y{}^2}_{\text{定数扱い}}) + \underbrace{\cancel{mgy}}_{\text{定数扱い}}\right\} = \frac{2p_x}{2m} = \frac{p_x}{m}$$

運動量の式(g)が導かれただけ！

(ii) (i)′を(d)に代入して，

$$\underbrace{\dot{p}_x}_{\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x}} = -\frac{\partial}{\partial x}\left\{\underbrace{\cancel{\frac{1}{2m}(p_x{}^2 + p_y{}^2) + mgy}}_{x\text{ から見たら，すべて定数扱い}}\right\} = 0 \quad \text{より}$$

ニュートンの運動方程式 $m\ddot{x} = 0$ ……(a)が，まず 1 つ導けた。

(iii) (i)′を(e)に代入して，

$$\dot{y} = \frac{\partial}{\partial p_y}\left\{\frac{1}{\underbrace{2m}_{\text{定数扱い}}}(\underbrace{\cancel{p_x{}^2}}_{\text{定数扱い}} + p_y{}^2) + \underbrace{\cancel{mgy}}_{\text{定数扱い}}\right\} = \frac{2p_y}{2m} = \frac{p_y}{m}$$

運動量の式(h)が導かれただけ！

(iv) (i)′を(f)に代入して，

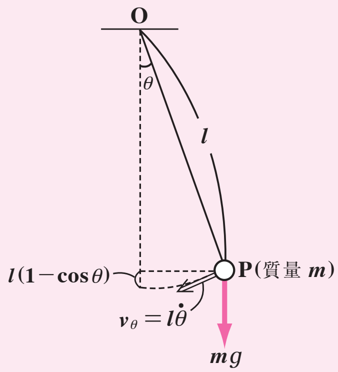
$$\underbrace{\dot{p}_y}_{\frac{d}{dt}(m\dot{y}) = m\ddot{y}} = -\frac{\partial}{\partial y}\left\{\underbrace{\cancel{\frac{1}{2m}(p_x{}^2 + p_y{}^2)}}_{\text{定数扱い}} + mgy\right\} = -mg \quad \text{より}$$

もう 1 つのニュートンの方程式 $m\ddot{y} = -mg$ ……(b)も導けた。

● 単振り子の運動も調べてみよう！

右図に示すように，P112で解説した単振り子(単振動)と同じ例題，すなわち，軽い長さ l の糸につけた質量 m のおもり P の単振り子の運動について考えよう。糸の固定端 O を極とする極座標を用いると，おもり P の運動は，$r = l$(定数)という束縛条件より，自由度を 1 つ減らして，微小な振れ角 θ のみで表すことができる。つまり，この運動の自由度 $f = 1$ より，ニュートンの運動方程式は，

単振り子の振動運動



$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta$ ……① $\left(\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}\right)$ と表されるんだったね。

ここで，これをハミルトンの正準方程式で表すと次のようになるのはいいね。

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\theta} & \cdots\cdots\cdots ② \\ \dfrac{dp_\theta}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta} & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

自由度 $f = 1$ より，H は
$q_1 = \theta$，$p_1 = p_\theta = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$
とおいて，θ と p_θ の関数 $H(\theta, p_\theta)$ で表される。

$r = l$(定数)より，
$\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_r}$ と $\dfrac{dp_r}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial r}$
は不要だね。

それでは，この正準方程式②，③から，ニュートンの運動方程式①を導いてみよう。

今回，一般化運動量 p_θ を正確に求めるために，(ア) ラグランジアン L を求め，(イ) 次に，$p_\theta = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$ により p_θ を求め，(ウ) ハミルトニアン H を求める，手順に従うことにしよう。

(ア) まず，ラグランジアンを求めると，

$$L = T - U = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1-\cos\theta) \quad \cdots\cdots ④$$ となる。

(イ) 次に，$p_\theta = \dfrac{dL}{d\dot{\theta}}$ を用いて，一般化運動 p_θ を求めると，

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}\left\{\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - \underbrace{mgl(1-\cos\theta)}_{\text{定数扱い}}\right\} = ml^2\dot{\theta} \quad \cdots\cdots ⑤$$ となる。

よって，⑤より，$\dot{\theta} = \dfrac{p_\theta}{ml^2}$ ……⑥ となる。

⑥を，$L = \dfrac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1-\cos\theta)$ ……④ に代入すると，

$$L = \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{p_\theta}{ml^2}\right)^2 - mgl(1-\cos\theta)$$ より，

$$L = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - mgl(1-\cos\theta) \quad \cdots\cdots ④'$$ となる。

(ウ) そして，ハミルトニアン H を公式通りに求めると，

$$H = \underbrace{p_\theta \cdot \dot{\theta}}_{\sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i} - L = p_\theta \cdot \frac{p_\theta}{ml^2} - \left\{\frac{p_\theta^2}{2ml^2} - mgl(1-\cos\theta)\right\}$$

自由度 $f=1$

$$\therefore H = H(\theta,\ p_\theta) = \underbrace{\frac{p_\theta^2}{2ml^2}}_{T} + \underbrace{mgl(1-\cos\theta)}_{U} \quad \cdots\cdots ⑦$$ となる。

$H = T + U$ の形になっている。

(i) ⑦を②に代入して，

$$\dot{\theta} = \frac{\partial}{\partial p_\theta}\left\{\frac{p_\theta^2}{2ml^2} + \underbrace{\cancel{mgl(1-\cos\theta)}}_{\text{定数扱い}}\right\} = \frac{p_\theta}{ml^2}$$

となって，⑥と同じ式が導ける。

(ii) ⑦を③に代入して，

$$\underbrace{\dot{p}_\theta}_{\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\theta})} = -\frac{\partial}{\partial \theta}\left\{\underbrace{\cancel{\frac{p_\theta^2}{2ml^2}}}_{\text{定数扱い}} + mgl(1-\cos\theta)\right\} = -mgl\sin\theta$$ より，

$\cancel{m}l^{\cancel{2}}\ddot{\theta} = -\cancel{m}g\cancel{l}\underbrace{\sin\theta}_{\theta(\theta \fallingdotseq 0)}$

ここで $\theta \fallingdotseq 0$ から，$\sin\theta \fallingdotseq \theta$ と近似できるので，

$l\ddot{\theta} = -g\theta$ より，ニュートンの運動方程式：

$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta$ ……① $\left(\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}\right)$ が導けるんだね。納得いった？

以上で，ハミルトンの正準方程式から，ニュートンの運動方程式が導けること，つまり，ハミルトンの正準方程式とニュートンの運動方程式が，等価であることもご理解頂けたと思う。

以上の解説では，解析力学で利用される“ラグランジュの運動方程式”と“ハミルトンの正準方程式”の本当の初歩的な利用法を示したに過ぎないので，何故，ニュートンの運動方程式の代わりに，ラグランジュの運動方程式や，ハミルトンの正準方程式を利用する必要があるのか？疑問に思われている方もたく山いらっしゃると思う。でも，これで，解析力学にも少しは興味をもって頂けたのではないだろうか？

実は，この解析力学で用いられるすぐれた数学的な手法は，オイラー角や，汎関数と変分原理，そして最小作用の原理や，リウビルの定理，さらには，ポアソン括弧などなど……，様々な分野にまで波及していくんだね。そして，これらの数学的手法は，統計力学や流体力学，そして量子力学においても重要な役割を演じることになる。つまり，解析力学は，現代の様々な分野の力学をマスターしていく上で，基礎となる重要な学問分野と言えるんだね。

したがって，さらに，この解析力学を極めたい方には，この後，
「解析力学キャンパス・ゼミ」(マセマ) で学習されることをお勧めする。これによって，さらに奥深くて面白い本格的な解析力学の世界を堪能して頂けると思う。