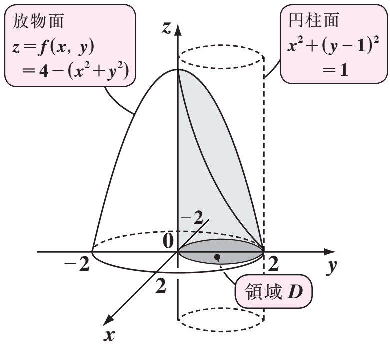
演習問題 31　● 極座標変換による重積分 (Ⅱ) ●

放物面体：$z \leqq 4-(x^2+y^2)$ かつ $z \geqq 0$ と，円柱：$x^2+(y-1)^2 \leqq 1$ の共通部分の体積 V を求めよ。

ヒント！ 放物面：$z=f(x,\ y)=4-(x^2+y^2)$ を，領域 D：$x^2+(y-1)^2 \leqq 1\ (z=0)$ において重積分すればいい。積分の際，極座標変換するので，ヤコビアン $|J|$ を利用しよう。

解答＆解説

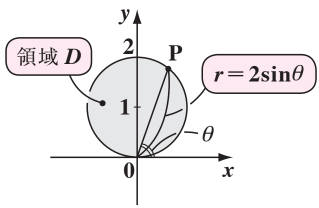


放物面：$z \leqq f(x,\ y)=4-(x^2+y^2)$ …①

$(z \geqq 0)$ と，円柱：$x^2+(y-1)^2 \leqq 1$ …②

の共通部分の体積 V は，$y=f(x,\ y)$ を xy 平面上 $(z=0)$ で②で表される領域 D で重積分して求められる。

$$\therefore\ V=\iint_D \underbrace{f(x,\ y)}_{4-(x^2+y^2)=4-r^2}\ \underbrace{dxdy}_{|J|dr d\theta = r dr d\theta}\ \cdots\cdots③$$



ここで，変数 $x,\ y$ を極座標 $r,\ \theta$ に変換すると，$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ より，

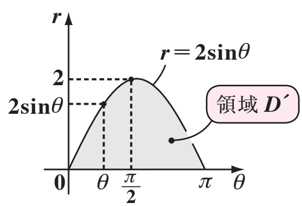
xy 平面 $(z=0)$ 上の領域 D(②)は，

$$\underbrace{r^2\cos^2\theta+(r\sin\theta-1)^2}_{r^2(\underbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta}_{1})-2r\sin\theta\cancel{+1}\leqq\cancel{1}} \leqq 1$$

$$r(r-2\sin\theta) \leqq 0 \quad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$$

よって，極座標での新たな領域 D' は，

D'：$0 \leqq \theta \leqq \pi,\ \ 0 \leqq r \leqq 2\sin\theta$　となる。



①の放物面 $z=f(x,\ y)$ も極座標で表すと，

$$z=f(x,\ y)=4-\underbrace{(x^2+y^2)}_{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta=r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=r^2\cdot1=r^2}\quad \text{より，}$$

$z = f(x,\ y) = 4 - r^2$ …①´であり，面要素 $dxdy$ は，ヤコビアン $|J|$ を用いて，

$dxdy = \underbrace{|J|}_{r}\,dr\cdot d\theta = r\,dr\,d\theta$ ……④　となる。

以上より，求める立体の体積 V は，③に，①´と④を代入して，

$$V = \iint_D f(x,\ y)\ dxdy = \iint_{D'} (\underbrace{4 - r^2}_{4-(x^2+y^2)\text{(①´より)}}) \cdot \underbrace{r}_{|J|\text{(ヤコビアンの絶対値)}} \cdot dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \left\{ \int_0^{2\sin\theta} (4r - r^3)\,dr \right\} d\theta$$

$$\left[2r^2 - \frac{1}{4}r^4\right]_0^{2\sin\theta} = 2\cdot 4\sin^2\theta - \frac{1}{4}\cdot 16\sin^4\theta$$

$$= 8\underbrace{\sin^2\theta}_{\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)} - 4\underbrace{\sin^4\theta}_{\left\{\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\right\}^2}$$

半角の公式：

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$= 8\cdot\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta) - \cancel{4}\cdot\frac{1}{\cancel{4}}(1-\cos 2\theta)^2$$

$$= 4(1-\cos 2\theta) - (1 - 2\cos 2\theta + \underbrace{\cos^2 2\theta}_{\frac{1}{2}(1+\cos 4\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4\theta})$$

$$= 4 - 4\cos 2\theta - \left(\frac{3}{2} - 2\cos 2\theta + \frac{1}{2}\cos 4\theta\right)$$

$$= \frac{5}{2} - 2\cos 2\theta - \frac{1}{2}\cos 4\theta$$

よって，求める体積 V は，

$$V = \int_0^{\pi}\left(\frac{5}{2} - 2\cos 2\theta - \frac{1}{2}\cos 4\theta\right) d\theta$$

$$= \left[\frac{5}{2}\theta - \underbrace{\cancel{\sin 2\theta}}_{0\ (\because\ \sin 2\pi = \sin 0 = 0)} - \cancel{\frac{1}{8}\underbrace{\sin 4\theta}_{0\ (\because\ \sin 4\pi = \sin 0 = 0)}}\right]_0^{\pi} = \frac{5}{2}(\pi - 0)$$ より，

$\therefore\ V = \dfrac{5}{2}\pi$ である。……(答)