$$Y(s) = \frac{2}{s(s-1)(s-2)}$$

この両辺を部分分数に分解すると，

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s-1} + \frac{1}{s-2} \quad \cdots\cdots ②$$

となる。

部分分数に分解した係数 a，b，c の値を求める。

$\frac{2}{s(s-1)(s-2)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s-1} + \frac{c}{s-2}$ について，

・$a = \left.\frac{2}{(s-1)(s-2)}\right|_{s=0} = \frac{2}{-1\times(-2)} = 1$

・$b = \left.\frac{2}{s(s-2)}\right|_{s=1} = \frac{2}{1\times(-1)} = -2$

・$c = \left.\frac{2}{s(s-1)}\right|_{s=2} = \frac{2}{2\times 1} = 1$

よって，②の両辺の逆変換をとればいいんだね。

$$\underbrace{\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]}_{y(t)} = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{2}{s-1} + \frac{1}{s-2}\right]$$

よって，

$$y(t) = \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]}_{1} - 2\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]}_{e^t} + \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]}_{e^{2t}}$$

公式：

$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1$

$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = e^{at}$

以上より，求める①の微分方程式の解 $y(t)$ は，

$y(t) = 1 - 2e^t + e^{2t}$　であることが分かった。納得いった？

本当に基本だけしか教えてはいないんだけれど，これだけでもラプラス変換と逆変換による常微分方程式の解法の流れをご理解頂けたと思う。積分を一切行わず，常微分方程式が解けてしまうところが，このラプラス変換による解法のスゴイところなんだね。面白かったでしょう？

それでは，この役に立つラプラス変換の範囲を三角関数にまで広げて，三角関数を解にもつ常微分方程式をいくつか解いてみることにしよう。ラプラス変換による解法の面白さを，さらに味わって頂きたい。

● ラプラス変換で，さらに微分方程式を解いてみよう！

ここでは，その証明は示さないけれど，まず三角関数 $\sin at$ と $\cos at$ のラプラス変換を下に示そう。

$\cdot\ \mathcal{L}[\cos at] = \dfrac{s}{s^2+a^2}$ ……$(*1)$

$\cdot\ \mathcal{L}[\sin at] = \dfrac{a}{s^2+a^2}$ ……$(*2)$ （ただし，$s>0$）

よって，この逆変換は

$\cdot\ \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2+a^2}\right] = \cos at$ ……$(*1)'$

$\cdot\ \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{a}{s^2+a^2}\right] = \sin at$ ……$(*2)'$ となるんだね。

これから，$\mathcal{L}[\cos 2t] = \dfrac{s}{s^2+2^2} = \dfrac{s}{s^2+4}$ となるし，$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{3}{s^2+9}\right] = \sin 3t$ となるんだね。

では，これらの公式も利用して，次の微分方程式を解いてみよう。

● 練習問題 ●

次の微分方程式をラプラス変換を使って解こう。（ただし，x と y は t の関数である）

(1) $y''+y=1$ …………① $(y(0)=0,\ y'(0)=1)$

(2) $\begin{cases} x'+2y=2 & \cdots\cdots\cdots ② \\ 2x-y'=0 & \cdots\cdots\cdots ③ \quad (x(0)=0,\ y(0)=-1) \end{cases}$

(1) ①の両辺をラプラス変換すると，

$$\underbrace{\mathcal{L}[y''(t)+y(t)]}_{\mathcal{L}[y''(t)]+\mathcal{L}[y(t)]} = \underbrace{\mathcal{L}[1]}_{\frac{1}{s}}$$

線形性！

ここで，$y(t)$ のラプラス変換を $\mathcal{L}[y(t)]=Y(s)$ とおいて，さらにこれを変形すると，

$$\underbrace{\mathcal{L}[y''(t)]}_{s^2Y(s)-s\underbrace{y(0)}_{0}-\underbrace{y'(0)}_{1}=s^2Y(s)-1}+\underbrace{\mathcal{L}[y(t)]}_{Y(s)}=\frac{1}{s}$$

$s^2Y(s)-1+Y(s)=\dfrac{1}{s}$ となる。よって，$Y(s)$ を s の式で表すと，

$(s^2+1)Y(s)=1+\dfrac{1}{s}$　より

$$Y(s)=\frac{1}{s^2+1}+\underbrace{\frac{1}{s(s^2+1)}}_{\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}}$$

$\dfrac{1}{s(s^2+1)}=\dfrac{a}{s}+\dfrac{bs+c}{s^2+1}$　とおくと

右辺 $=\dfrac{a(s^2+1)+s(bs+c)}{s(s^2+1)}$

$=\dfrac{(\underbrace{a+b}_{0})s^2+\underbrace{c}_{0}s+\underbrace{a}_{1}}{s(s^2+1)}$　より

$a+b=0$，$c=0$，$a=1$

$\therefore\ a=1$，$b=-1$，$c=0$　となる。

よって，$\dfrac{1}{s(s^2+1)}=\dfrac{1}{s}+\dfrac{-1\cdot s}{s^2+1}$

$$\therefore\ Y(s)=\frac{1}{s^2+1}+\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}\ \cdots\cdots①'$$

よって，①′ の両辺の逆変換を行って

求める解 $y(t)$ を求めよう。

$$\underbrace{\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]}_{y(t)}=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}+\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}\right]$$

$$=\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]}_{\sin1\cdot t=\sin t}+\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]}_{1}-\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]}_{\cos1\cdot t=\cos t}$$

線形性

公式

$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{a}{s^2+a^2}\right]=\sin at$

$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2+a^2}\right]=\cos at$

以上より，求める解 $y(t)$ は

$y(t)=\sin t-\cos t+1$　である。

(2) では，次の連立微分方程式の両辺をラプラス変換しよう。

$$\begin{cases} x'(t)+2y(t)=2 & \cdots② \\ 2x(t)-y'(t)=0 & \cdots③ \end{cases}\quad (x(0)=0,\ y(0)=-1)$$

ただし，$x(t)$ と $y(t)$ のラプラス変換は，それぞれ $X(s)$，$Y(s)$ とおくことにしよう。

②は，$\underbrace{\mathcal{L}[x'(t)+2y(t)]}_{\mathcal{L}[x'(t)]+2\mathcal{L}[y(t)]\;=\;sX(s)-\underbrace{x(0)}_{0}+2Y(s)} = \underbrace{\mathcal{L}[2]}_{2\mathcal{L}[1]\;=\;2\cdot\frac{1}{s}}$　より

線形性

$sX(s)+2Y(s)=\dfrac{2}{s}$　……②′　となり，

③は，$\underbrace{\mathcal{L}[2x(t)-y'(t)]}_{2\mathcal{L}[x(t)]-\mathcal{L}[y'(t)]\;=\;2X(s)-\{sY(s)-\underbrace{y(0)}_{-1}\}} = \underbrace{\mathcal{L}[0]}_{0}$　より

線形性

$2X(s)-sY(s)=1$　……③′　となる。

$$\therefore \begin{cases} sX(s)+2Y(s)=\dfrac{2}{s} & \cdots ②' \\ 2X(s)-sY(s)=1 & \cdots ③' \end{cases}$$
を変形して，

$$\begin{bmatrix} s & 2 \\ 2 & -s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{s} \\ 1 \end{bmatrix}$$

この両辺に $\begin{bmatrix} s & 2 \\ 2 & -s \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{-s^2-4}\begin{bmatrix} -s & -2 \\ -2 & s \end{bmatrix} = \dfrac{1}{s^2+4}\begin{bmatrix} s & 2 \\ 2 & -s \end{bmatrix}$ を左から

かけて

$$\begin{bmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2+4}\begin{bmatrix} s & 2 \\ 2 & -s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{s} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$(\Delta = ad-bc)$ だからね

$$= \frac{1}{s^2+4}\begin{bmatrix} 2+2 \\ \frac{4}{s}-s \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2+4}\begin{bmatrix} 4 \\ \frac{4-s^2}{s} \end{bmatrix}$$
より

$X(s)=\dfrac{4}{s^2+4}$　……④，　$Y(s)=\dfrac{4-s^2}{s(s^2+4)}$　……⑤　となる。

さらに⑤の右辺を変形して

$$Y(s)=\frac{4-s^2}{s(s^2+4)}$$
$$=\frac{1}{s}-2\cdot\frac{s}{s^2+4}\quad\cdots\cdots⑤'$$ となる。

$$\frac{4-s^2}{s(s^2+4)}=\frac{a}{s}+\frac{bs+c}{s^2+4}$$ とおくと

右辺 $=\dfrac{a(s^2+4)+s(bs+c)}{s(s^2+4)}$

$=\dfrac{(\underbrace{\boxed{a+b}}_{-1})s^2+\underbrace{\boxed{c}}_{0}s+\underbrace{\boxed{4a}}_{4}}{s(s^2+4)}$ より

$a+b=-1,\ c=0,\ 4a=4$

$\therefore a=1,\ b=-2,\ c=0$ となる

よって $\dfrac{4-s^2}{s(s^2+4)}=\dfrac{1}{s}-\dfrac{2s}{s^2+4}$

(ⅰ) よって，④の両辺を逆変換して，解 $x(t)$ を求めると

$$\underbrace{\mathcal{L}^{-1}[X(s)]}_{x(t)}=\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2\cdot 2}{s^2+4}\right]}_{2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+2^2}\right]=2\sin 2t}$$ より

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right]=\sin at$$

$\therefore\ x(t)=2\sin 2t$ である。

(ⅱ) 次に⑤$'$ の両辺を逆変換して，解 $y(t)$ を求めると，

$$\underbrace{\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]}_{y(t)}=\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}-2\cdot\frac{s}{s^2+4}\right]}_{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]-2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+2^2}\right]=1-2\cos 2t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right]=\cos at$$

$\therefore\ y(t)=1-2\cos 2t$ である。

どう？ラプラス変換も，三角関数まで含めると，さらに解ける問題の幅が広がって，面白かったでしょう？

しかし，ラプラス変換は実践面だけでなく，理論的にも奥深い内容がまだまだたくさんあるんだね。だから，より本格的にこのラプラス変換を学んでみたい方には，「ラプラス変換キャンパス・ゼミ」(マセマ)をお勧めする。新たな数学的展望が広がっていくはずです。是非チャレンジしてください。