演習問題 12	● 連立微分方程式の解法 ●

次の連立微分方程式をラプラス変換により解け。

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t)=-\{2x_1(t)-x_2(t)\} \cdots\cdots① \\ \ddot{x}_2(t)=-\{-x_1(t)+2x_2(t)\} \cdots② \end{cases} \quad (x_1(0)=2,\ \dot{x}_1(0)=0,\ x_2(0)=0,\ \dot{x}_2(0)=0)$$

(ただし，x_1，x_2 の t による 1 階，2 階微分を，$\dot{x}_1$，$\dot{x}_2$，$\ddot{x}_1$，$\ddot{x}_2$ と表している。)

ヒント！ この連立微分方程式は，連成振動の微分方程式 $\begin{cases} \ddot{x}_1=-\omega_0^{\,2}(2x_1-x_2) \\ \ddot{x}_2=-\omega_0^{\,2}(-x_1+2x_2) \end{cases}$ の $\omega_0^{\,2}=1$ の場合の問題になっている。また，物理では時刻 t での微分は x_1' や x_2'' の代わりに $\dot{x}_1$ や $\ddot{x}_2$ などのように表すことが多い。これも覚えておこう。

解答＆解説

$\mathcal{L}[x_1(t)]=X_1(s)$，$\mathcal{L}[x_2(t)]=X_2(s)$ と表すものとして解いていこう。

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t)=-2x_1(t)+x_2(t) \cdots\cdots① \\ \ddot{x}_2(t)=x_1(t)-2x_2(t) \cdots\cdots\cdots② \end{cases}$$ について，

(i) ①の両辺をラプラス変換すると，

$$\underbrace{\mathcal{L}[\ddot{x}_1(t)]}_{s^2X_1(s)-sx_1(0)-\dot{x}_1(0)}=-2\underbrace{\mathcal{L}[x_1(t)]}_{X_1(s)}+\underbrace{\mathcal{L}[x_2(t)]}_{X_2(s)}$$

$$s^2X_1(s)-s\underbrace{x_1(0)}_{2}-\cancel{\underbrace{\dot{x}_1(0)}_{0}}=-2X_1(s)+X_2(s),\quad s^2X_1-2s=-2X_1+X_2$$

$$(s^2+2)X_1-X_2=2s \cdots\cdots③$$

(ii) ②の両辺をラプラス変換すると，

$$\underbrace{\mathcal{L}[\ddot{x}_2(t)]}_{s^2X_2(s)-sx_2(0)-\dot{x}_2(0)}=\underbrace{\mathcal{L}[x_1(t)]}_{X_1(s)}-2\underbrace{\mathcal{L}[x_2(t)]}_{X_2(s)}$$

$$s^2X_2(s)-\cancel{s\underbrace{x_2(0)}_{0}}-\cancel{\underbrace{\dot{x}_2(0)}_{0}}=X_1(s)-2X_2(s),\quad s^2X_2=X_1-2X_2$$

$$X_1-(s^2+2)X_2=0 \cdots\cdots④$$

以上(i)(ii)より，③，④を列記して，X_1 と X_2 を求めると，

$$\begin{cases} (s^2+2)X_1-X_2=2s \cdots\cdots③ \\ X_1-(s^2+2)X_2=0 \cdots\cdots④ \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} s^2+2 & -1 \\ 1 & -(s^2+2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s \\ 0 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots ⑤$$

行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の
逆行列 $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$
$(\Delta = ad - bc)$

$\Delta = -(s^2+2)^2 + 1 \neq 0$ より，⑤の両辺に

$\begin{bmatrix} s^2+2 & -1 \\ 1 & -(s^2+2) \end{bmatrix}^{-1}$ を左からかけて，

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} -(s^2+2) & 1 \\ -1 & (s^2+2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2s \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{1-(s^2+2)^2}\begin{bmatrix} -2s\cdot(s^2+2) \\ -2s \end{bmatrix}$$

よって，$X_1 = \dfrac{2s(s^2+2)}{(s^2+2)^2-1}$ ，　$X_2 = \dfrac{2s}{(s^2+2)^2-1}$

$$\frac{2s(s^2+2)}{(s^2+3)(s^2+1)} = s(s^2+2)\left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+3}\right)$$
$$= s\left(\frac{s^2+2}{s^2+1} - \frac{s^2+2}{s^2+3}\right) = s\left(\frac{s^2+1+1}{s^2+1} - \frac{s^2+3-1}{s^2+3}\right)$$
$$= s\left(\cancel{1} + \frac{1}{s^2+1} - \cancel{1} + \frac{1}{s^2+3}\right) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+3}$$

$$\frac{2s}{(s^2+3)(s^2+1)} = s\left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+3}\right)$$
$$= \frac{s}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+3}$$

$\therefore X_1(s) = \dfrac{s}{s^2+1} + \dfrac{s}{s^2+3}$ ……⑥，$X_2(s) = \dfrac{s}{s^2+1} - \dfrac{s}{s^2+3}$ ……⑦ となる。

よって，⑥，⑦の両辺をラプラス逆変換して，$x_1(t)$，$x_2(t)$ を求めると，

$$x_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[X_1(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+3}\right] = \cos t + \cos\sqrt{3}\,t$$

$$x_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[X_2(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+3}\right] = \cos t - \cos\sqrt{3}\,t$$

$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2+a^2}\right] = \cos at$

以上より，求める $x_1(t)$ と $x_2(t)$ は，

$x_1(t) = \cos t + \cos\sqrt{3}\,t$，$x_2(t) = \cos t - \cos\sqrt{3}\,t$ である。…………………(答)

参考

連成振動の物理モデルの例として，2 つの質量 m の振動子 P_1，P_2 が，ばね定数 k の 3 つのばねに水平に連結されている "水平ばね振り子" の図を右に示す。